数学与医学

青义学 著

中南大学出版社

数 学 与 医 学

青义学　著

中 南 大 学 出 版 社

数学与医学

青学义 著

□责任编辑 谢贵良

□出版发行 中南大学出版社

社址：长沙市麓山南路 邮编：410083

发行科电话：0731-8876770 传真：0731-8710482

电子邮件：csucbs@public.cs.hn.cn

□经　　销 湖南省新华书店

□印　　装 中南大学印刷厂

□开　　本 730×960 1/16 □印张 22.5 □字数 431千字

□版　　次 2004年2月第1版 □2004年2月第1次印刷

□书　　号 ISBN 7-81061-880-6/O·047

□定　　价 30.00元

图书出现印装问题，请与经销商调换

序

李桂源

青义学老师64岁来到湖南医学院教研究生数学，我有幸忝列门墙，深受教益。以他的学识和经验，教研究生数学，本是轻车熟路，但他不满足，要学自己不懂的医学，学新问世的模糊数学和生物数学。为什么呢？他从国际上新的科研方向、新的“医学数学化”潮流，认为他教的研究生应该达到世界的水平，为祖国的振兴作出贡献。他认为他的努力是有价值的，也是有回报的。他的研究是和他的研究生同步进行的，给学生的科研方法有较大的启示，有的学生写出了有价值的论文发表。他的研究是要用数学改变医学的理论结构，用数学来定义医学概念，用数学论证并发展医学理论。他给出了一条研究“医学数学化”的路子（本书第二篇），发表了十多篇论文。他的研究在国际上也是领先的，但是青老师认为医学专家系统，还不完善，没有达到专家水平，是他终身遗憾。他实事求是的精神和谦虚的态度，更是我们后学的表率。

青老师从1957年起研究数学史。他认为学数学的不学数学史，不可能把数学学通，不懂我国古代数学，更是无知；教数学的不学数学史，不可能把数学教活，在堂上结合教材插讲一点数学史，介绍数学家的治学精神、思考规律，通晓知识的来龙去脉，能提高学习数学的兴趣，拓大爱好数学的队伍，对以后的科研大有裨益。本书中的第一篇数学的发展及其实质，值得数学教师认真一读。

青老师教书六十年，其教学艺术我辈高山仰止，记得东坡先生有首《花影》的诗：

重重叠叠上瑶台，几度呼童扫不开。

刚被太阳收拾去，却教明月送将来。

把花影写得入神入画，青老师的课就是这样引人入胜亲切感人。本书第三篇概述

李桂源教授是中南大学副校长，博士生导师。

了心理学、教学论和教学法的精髓，是他六十年教学的结晶。"长风几万里，吹度玉门关"。目前高校中有不少教师没系统学习教学法，这部权威作品，对他们是"及时雨"。

青老师为人正直诚恳，关心学生成长，桃李满天下。他学生中有部长、将军、省委常委、全国人大代表、市长、大学校长（院长）、博士生导师、教授、博士、工程师，还有大量的中学教师。这些学生正是老师晚年的座上嘉宾。

"解缆君已遥，望君犹伫立"

相逢一笑，堪慰晚年。本书的"往事回首"，复现了这些友情，也总结了老师的为人处世之道。且文笔生花，读来兴味盎然。青老师在书中写道，他"少有基础，中有坎坷，老有作为"，"人贵有志"，"勤以补拙"，"不如意事要妥为面对，苦尽甘来，也要勤俭如常"。确是我们的座右铭。

青老教授以九十高龄，写了这部《数学与医学》的巨著，是我们后学的典范，特为之序，以飨读者。

目　　录

第一篇　数学的发展及其实质

第二篇　医学数学化的构架

第三篇　数学的教学

往事回首

① 弁言

出门无所见，白雪满平庑，
树静花林皎，寒山听鸟呼。

是我小时写的咏雪诗，诗很平淡，但国文老师对首尾两句很满意，给我很大鼓励，父亲望子成龙，更是高兴。出示给他的朋友，付昧尘叔叔说，"首句雄浑，二句平淡，三句有败笔，末句有诗意。这四句好像四个年代，少年皎皎，壮年平平，中年坎坷，老有作为，是玉琢（我的乳名）自判流年，玉不琢不成器，玉其琢乎！"当时不以为意，现在想来，少有基础，中有坎坷，老有所为，正像我一生的写照，付老预言，何其巧合！

我初中时爱读诗词，背的古诗，还记忆犹新；高中时受老师指引，热爱古典文学，如果不是国家多难，时尚科学救国，我一定改学文史。正由于此，不时蒙发写作兴趣，最近读陆游《沁园春》：

> 交亲散落如云，又岂料而今余此身，幸眼明身健，茶甘饭软，非惟我老，更有人贫，躲尽危机，消残壮志，短艇湖中闲采莼，吾何恨，有渔翁共醉，溪友为邻。

这首词与我的晚景相似，更蒙发了文思，自信人贵有志，书要自己读，路要自己走，年轻时必须打好基础，锻炼身体，遇到坎坷也要妥为面对，走出低谷，晚景更是自己铸成，应该老有所为，不负此生。因此欣然命笔，不惜余生，也算"万卷古今消永日，一窗春晚送流年"。

我是学数学的，终身教书，一无建树，64岁到医学院教医科研究生，找到了医学这个载体，向研究生学医学，先当学生，走进了医学数学化之门，小有所获。这本小书，大部分是回首往事，俾后人可用以做人教子；另一部分是研究医学数学化的

心得，写出来是抛砖引玉，希望医学界和数学界的同仁能重视这个世界新潮流，光复祖国"医学王国"的荣誉，为我国的繁荣昌盛作出贡献。

我年近九旬，身健眼明，有人问我长寿之道，无非胸襟开阔，自求多福，谨以郑板桥六十自寿联相赠：

常如作客，何问康宁！但使囊有余钱，瓮有余酿，釜有余粮，取数页赏心旧纸，放浪吟哦，心要阔，皮要顽，五官灵动胜千官，过到六旬犹少；

定欲成仙，空生烦恼，只令耳无俗声，眼无俗物，胸无俗事，将几枝随意新花，纵横穿插，睡得迟，起得早，一日清闲似两日，算来百岁已多。

2003年识于中南大学湘雅医学院

时年九十

② 似水流年

老 屋

1914年5月初二我出生在汉寿高汊障爷爷的老屋里，六缝五间，中间是堂屋，放一些农具，母亲严菊英，姐姐玉玢和我住在西边夹正房，东钥匙头是牛栏，西钥匙头是仓屋，仓里放些杂物，角上有少量的谷子，父亲在县里教小学，家有几亩薄田，一头牛，几头猪，爷爷声教六十多岁，雇了一个长工，母亲也下地，是个农民家庭。

这栋老屋向东，面对大河，常有轮船帆船行走。对河羊溪咀，有两户渔家，一姓张一姓易，青张易隔河而居，老死不相往来。老屋后古木参天，冬暖夏凉，屋左有一水塘，邻居小孩都在那里玩水，奶奶姓樊，老年抱孙，不许我去玩水，我只得望塘兴叹。宋张舜民诗：

"水绕波田竹绕篱。榆钱落尽槿花稀。

夕阳牛背无人卧，带得寒鸦两两归。"

其背景与老屋何其相似！母亲住室正是水绕波田竹绕篱。记得奶奶说父亲小时看牛，把牛拴在青家障堤上吃草，自己偷偷读书，正是"夕阳牛背无人卧"的景象。

奶奶是位能干的老妇，她说"几十年前，青家出了一位在河南任知县的青家升老爷爷，我做女儿时看到从游巡塘那方来了好多艘官船，载有河南红枣，走这个河里经过，到县城宝塔河青家湾落脚。家升老爷爷有三个夫人七个儿子。大儿子声远住宝塔河；二儿子声明住河叶寨；三四儿子声望、声唤住岩咀；五儿子声扬六儿子声恒七儿子声教（就是家里的爷爷）是一母所生住高汊障。这栋老屋就是六爷爷修的。他在青家障教书，家业小康，看到你爹以庄有心向学，过继为子，那时我有两个儿子，现在只有你爹一个了"。奶奶又说："青家有两颗星星，一是家升老爷爷，二是你爹，宝塔河的风水，快转到高汊障了。"

1919年我五岁发蒙读书，先生是一位戴老光眼镜的长者，教我《三字经》，背不得就打手板，以后父亲带来新书《人手足刀尺》，有图有字，叫我认字，我老说人字手字足字，去不掉"字"，父亲很生气，说我不是读书的料。

1920年，老屋卖给钟六叔，那时爷爷奶奶都已去世，家里迁到县城，在西门三义庵修了一栋新屋，记得新屋里有两幅楹联，一幅写着：

老杜志同坚，安得万间庇寒士；

子舆心共热，克全三乐育英才。

另一幅是：

文章千古事，名教一生新。

走廊上挂着一顶官轿，是父亲放澧县县长时买的。那时父亲在长沙省教育司任省视学，是家里鼎盛时期。

1922年我在汉寿县立女校读初小，同班的有黄中、汤世均兄弟，汤会写艺术字，我很是羡慕，姐姐读高小，管我甚严。校长易瑜（女诗人）是黄中的母亲，校风很好，学生也很勤奋，教音乐的陈纫兰老师很喜欢我，给我注入了音乐细胞。

1924年刘有春来我家读书，有春是父亲老师刘棣芬和好友刘民镜的侄女。我们曾在县立女校同学，青梅竹马，天真无邪，久之就"同居长干里，两小无嫌猜"了，1932年夏大老家人王海棠雇船送有春回家（马家撮）。我也随行。其实那时我们就在恋爱，只是心照不宣耳。船过老屋，在钟六叔家作客，饭后上船，上说："送君千里终须一别。"我只好在钟家等王送有春去马家撮，坐在老屋门前，正晚霞满天，"落霞与孤鹜齐飞，秋水共长天一色"，景象迷人，等王海棠的船回来后，放夜舟返城，已东方既白了。

1924年9月在龙池书院县立一高读高小，同班有张敏（有春二姐夫）杨长树（有春三姐夫），以后张敏结婚才知道是联襟，在这里还认识了十九班的袁序昭，结为金兰，袁工于书画，我开始学画。

一高小有个亭台，高八尺，有些人同学能够跳下，我试了几次，缺乏胆量，一个雨天我突然撑伞跳下，同学为之惊讶，说我有点小聪明。

私　塾

高小毕业后父亲要家人邓秋发接我到省城长沙，在下河街打电话，话筒里传来父亲的声音，首次接受新事物，兴奋异常。父亲住在理问街省教育司，以后路过理问街（现省人民银行）总要望望这个窗口。

1927年春节前和父亲回到汉寿，父亲见我国文太差，请他的老朋友易瑜老师教我和她的儿子黄中读《孟子》，易老师（1867－1932）是我县女诗人，出自书香之家，其父易笏绅，以举人出任儒将，是同治年间著名的诗人，长兄易实甫也是举人、诗人，官至道台。二兄易由甫，进士、诗人，辅仁大学、山西大学教授，他们一家四人有乡耆比作宋代苏东坡一家。

易老师著有《湘影楼诗》、《髫龄梦影》、《西园忆语》、《十索诗》等，少年时的诗句，有些成为邑中文人的口碑。如

杨柳风柔桃浪软，慈亲含笑命题诗，
谁道小桃都薄命，含笑把酒问东风；
玲珑笑语娇儿慧，颠倒琴书小婢痴；
道合友非逾骨肉，性真儿女亦英雄，

此身虽恨非男子，愿向沙场革裹尸；

谁将天地空灵气，酿作才人笔上花。

她教书共为得法，十分吸引学生，给我们讲《孟子》时，把原文编成口语，如：

“梁惠王咀嗑嗑，晋国天下‘黑麻’大，瞒不得您老人家；不料传到我手下，国家屡次受糟塌，东边打一仗，大媳妇守了寡；西边打一仗，地方丢了一‘拍拉’；南边又被蛮子骂，寡人脸上像鸡虱子爬，我要为死者抱仇恨，您有什么好办法？”

然后要我们看书：

“梁惠王曰：晋国天下莫强焉，叟之所知也，及寡人之身，东败于齐，长子死焉；西丧地于秦七百里；南辱于楚，寡人耻之，愿为死者一洒之，如之何则可？”

七十多年过去了，言犹在耳，真如杜甫诗句：“欲觉闻晨钟，令人发深省。”

易老师长子黄卓后为英国硕士，燕京大学教授。次子黄中后为美国硕士，世界银行研究员黄中与我小学大学同学，与西南联大蔡竹筠结婚，蔡父出资，两人同去留学，两个儿子都是博士，尔后，曾回国看望我们，同游北京。

1927年春天汉寿城乡搞农民运动，长沙发动“马日事变”，赵恒惕政府垮台，父亲离开教育司到江苏松江中学教国文，姐姐原在桃源女师读书，初中部合并到常德省立第二初级中学，她接母亲和我去常德，住在金家巷徐家，姐姐和徐家兄嫂都是共产党员，经常在徐家开会，母亲在门外把风，我帮着写标语、贴传单，徐家屋大，有三进，没有后门，一天母亲进来说有人来了，开会的人从厨房窗户逃走，过几天常德发动“敬日事变”，大肆屠杀革命人士，省二初中校长胡佐武被害，姐姐的同学熊群仙、张锐也在小西门外被害，姐姐下落不明。我和母亲不得已回到汉寿。一个大热天，地下党把姐姐和另一桃源人送到家里，那个桃源人住了一个多月才走，他给我讲了许多革命故事，他的桃源口音，犹在耳边回响。

1927年8月父亲从江苏回来，对母亲说：“自己的事小，教子成人事大，这个儿子不懂事不爱读书，一定要设法挽救，不然我们肖家就没有希望了！”于是在三义庵房屋后面又买了一栋通街的房子作为书房，请他的同学潘琴甫老师教我的古文，同窗的有李自芸、彭藩舟、高道志等。第二年春天，迁到易公馆（易笏绅家园）南楼，是龙近仁叔叔的书房，“风景这边独好”，增加了龙丕才同窗，潘老师教我们《孟子》、《古文观止》、《左传》，讲了就要背，同时要我们阅读圈点史书《纲鉴易知录》（16本），有次讲“泷冈阡表”，有二千多字。高道志问：“这篇长文要不要背？”潘老师说：“有些文章一定要背。能背才算是你的。不读‘月明星稀，乌鹊南飞，远树三匝，无枝可依’，就不知道曹操还是位诗人；不读‘先天下之忧而忧，后天下之乐而乐’，就不理解古人范仲淹竟有如此的胸怀。必须趁着年轻背点东西，年纪大了，记忆就差了，这时不努力，将来后悔就迟了！”高道志到下午就背了，我就不行，老要先生提头

才能背尾。一次潘老师出个作文题，我莫明其妙，问高道志，高说是《易知录》上的典故，我十分惊讶，全无印象，原来我圈点《易知录》是走过场，没有看懂，我反问自己：书是给谁读的？走过场是给谁看的？我很惭愧，以后把《易知录》重新圈点，认真阅读，才真有所得。这是我一生的转折点。

潘老师的话，我感触很深，记得东坡先生的两句诗：

"欲把西湖比西子，淡汝浓抹总相宜。"

但前面两句忘了，后来查了原诗是：

"水光潋滟晴方好，山色空濛雨亦奇。"

过了许久，查的这两句仍然记不得，真如潘老师所说："能背才算是你的！"可见"记"很重要，知识如果不与记忆同步，那就没有知识。

中　学

1929年春父亲在常德西路公路局工作，我考入省立三中初七班，学校有条长廊，两边贴的是学生的优秀作业，我认识的同学李盛华、沈克家的文章经常"上墙"，心想：我什么时候也能"上墙"就好了。有一次写了一首咏雪的诗：

"出门无所见，白雪满平庑，
树静苑林皎，寒山听鸟呼。"

老师对首尾两句评价很高，把它上了墙，使我热血沸腾，欣慰无比，初七班第一次有人"上墙"，全班兴高采烈。这次事件，给了我信心、勇气和毅力，使我有了上进之心，以后读书知道是自己的事，再不要父母操心了。

我们初七班有一股好的上进之风，你追我赶，争夺头名。这些同学是黎盛斯（清华学生，地质学家），陈高林（北大学生，语言学家），裴新澍（中央大学学生，农学家），李孝定（中央大学学生，史学家），还有张有恒（清华学生）、李厚源（湖南大学学生）和我。我们的成绩每期都上了九十分，我在这个群体中是最差的。我的体育、音乐、美术都是高分，有时也夺过头名。

初七班的老师是高水平的，数学有蒯魁吾、邓文彬、陈炳琪，是三中的三大数学台柱，我在初中就自学了温德华斯平面几何（读高中时就用的这个教本），书中有个西摩松线的题被我解出来了，邓老师高兴至极，又再次上了"墙"。

体育老师王悠然有次对我说："小家伙，光读书不行呀，还要锻炼好身体，你是个皮包骨！"约我早上晨跑，第二天没亮，我就到了操场。王说："孺子可教！"以后每天晨跑，初中、高中六年没有间断。初中一同晨跑的有陈高林、张有恒、李厚源、阙本炬、李峙雄、赵湖等。还想出了边跑边背英语的巧办法。

初中这一阶段，对我一生起了重大的奠基作用，知识基础、体质基础、做人的基础，由于基础夯实，终生受用不尽。

同班中最有成就的是裴新澍，三十岁就是教授，以后过从甚密，20世纪80年

代还出席了他的博士生答辩会。李孝定是台湾大学甲骨文专家，也常有书信来往，陈高林在魏公村民族学院，五次去北京都在他家作客。

1932年在长沙省立一中普13班读书，这个学校在湖南是高水平的，英语老师不讲中文，数理化用英文教本，我成了后进，第一学期好不容易平均才80分，被父亲骂了一顿，说我在朱寿嵩家看京戏，学京剧，"你要自甘堕落，我也没办法，将来会自食其果的！"我确实同朱寿嵩看了京戏，也学了留声机里的京戏，父亲的教训使我猛省，不能用以前的办法读书了，除坚持晨跑外，要在想和记上苦下功夫，分秒必争。我开始开早车夜车了，笨鸟先飞。我除教本外又学了二氏解析几何、霍尔乃特大代数、初等微积分。平均上了90分，成为普13班的尖子之一。

国文老师李肖丹是长沙名人，他说："中国古书汗牛充栋，不可能全读，也不能全然不知，要博而后约，特别是打算学理工的，不能对文史一无所知，中国的古典小说《红楼梦》、《三国演义》、《水浒》、《西游记》都不知道，岂不是个文盲！中学学的国文只是沧海一粟，自己要另找时间补这一课。"我和李老师过从甚密，他指导我读了一些古籍，在这方面又上了一个台阶。

1933年下期一中出了学潮，赶校长彭晋云。地理老师吴晦华（何键省长同乡）支持这一学潮。1934年上期，校长换了吴晦华，吴解聘了一批知名的教师，引起学生不满。正逢湖南"倒何"之风，再引起了一中学潮。我是班干部，学生会派代表到省教育厅请愿，我是代表之一。暑假何、吴没有倒台，把一中改名省立长沙高级中学，吴任校长，学生重新登记，请愿的代表70多人都被拒绝登记，实际上就是开除。这是我首次遭遇不公正待遇，不久就得到解职的教师缪岳南等的帮助，我和李吉和，唐覃、刘洋中四人到文艺中学上毕业班继续读书。

在一中我交了许多好友，他们是刘鹤年（广西大学教授）、李廉锟（长沙铁道学院教授）、田运钧（全国政协委员、总工程师）、谈尚猷（中央大学）、李吝彬（中央大学）、裴新澍、李吉和等，星期天常和他们游岳麓山。那里有黄道让题的一幅名联：

"西南云气来衡岳，日夜江声下洞庭。"

而今荡然无存！飞来钟也飞了，江山不可复识矣！（现在所见都是后来复制的）

1932年十月初八我和有春结婚，家里十分兴旺，热闹非凡。1933年生第一个儿子，时父亲在松江中学任教，取名松平，父母老年得孙，甚是欢喜。1937年生步平，我在外读书，1939年回来步平喊："客客来了"，真如贺之章诗"儿童相见不相识，笑问客从何处来"。

文艺中学是湖南的二类中学，那时高中要全省统一会考派名次，文艺请了著名老师教毕业班，我赶上了这个机会，老师比一中的还好，印象最深的是英语，老师发了两本书，一本是英语短文选，有三百篇短文要我们自学自背。他说："胸中没有背熟几篇英文，就不能开口讲英语，也不能写作。"他分派甲乙丙同学找ABC背；另一本英文语法，比《英文字典大全》更精更好，把句子分析得透彻见底。我吸取一中的

教训，一心读书备考，把三百篇短文都背在心里，会考得了全省第七名，总算没有辜负父母望子成龙的心愿，对二老算是一种安慰。我被一中辞退，刺激很大，也出了一口怨气。

1936年上期家里从汉寿县城迁到朱家湾朱寿嵩家，父亲因家用过多，避住乡间，我则专门备考，把国英数理化各科都作了系统的复习整理。这年大水，在去武汉报考前夕父亲叮嘱："你学什么我没意见，但希望你考武汉大学，它离家近，我老了，一个电报就能回来。"我去武汉报考了四所大学，三所被录取。惟独武大落第。由于北大名气大，父亲仍很满意，父执辈游洪范、易瑜、黎约三、龙近仁、李干初、彭向辰、周箴甫等在雷震宫设宴饯行。此情此景，难以忘怀。

大　学

民国二十四年(1935)汉寿地区发大水，在家境困难的情况下父亲仍支持我去北大读书。我与刘鹤年、黄中乘火车到了北平，黄中去燕大(他大哥黄卓是燕大教授)，我与刘鹤年到高庙儿胡同常德会馆找到剑寰姐夫介绍的余汉邦，余待我们很热情，当晚安排住宿。黄中要我住燕大，将来容易留学，并为我报了到，安排了宿舍，我去燕大拜访黄卓，一进校门就被"托斯"(对新生的进门礼)，头上投油，钻狗洞……安排与大四同学住一间房，学生都讲英语，洋气十足，我遵从父亲的意见，还是进了北大。

北大教授用英语讲课，同学用英语提问，我又面临高一的情景，落后就要挨打，我必须扭转这个局面，只得下苦功赶上形势。过去向往的北平，无非是风景名胜，暂时只得靠边，隔壁就是故宫、景山、北海，也没有时间一游。

我向往的名城古都，这时已非一片乐土，日本兵在马路上荷枪实弹，横行无忌，中国人在自己的国土上与敌人擦肩而过，只能吐口水嗤之以鼻。1935年11月冀东组织殷汝耕汉奸的防共"自治"政府，使冀东22县脱离祖国。当时的国民政府和日本签订了秘密的"何梅协定"，承认日本在冀东的统治权，又进一步策动"华北五省自治运动"，国民党还指示二十九路军司令宋哲元成立"冀察政务委员会"，以适应日本"华北政权特殊化"的要求，这个形势正是"华北之大已经放不下一张平静的书桌了"。在共产党的领导下组织了轰轰烈烈的"一二·九"运动。

12月9日这天清晨，北大北河沿三院传出消息，今天停课游行，口号是"反对华北自治"，"反对亲日投降"，"反对内战"。吃早点后在红楼后集合出发，我和沈克家、刘鹤年等随队伍游行，经沙滩、出南池子与二十九路军和警察发生搏斗，在抢水龙头的战斗中我打湿了皮袍子，大队直奔天安门，在新华门前被大刀队冲散，杀伤了几个同学，我跑掉了一只鞋，在北风呼啸下，随一部分同学经西四回到北大。另一部分同学到前门开大会，宋哲元下令将前门、崇文门和平门都关了，历史上只有慈禧下令关过这三门。北平市学联通电全国罢课，反对华北自治，要求停止内战、

打倒日本帝国主义，要求释放爱国学生，惩办镇压学生运动的凶手，随后全国各地学生群起响应。第二天蒋梦麟校长请胡适教授在北河沿三院给学生讲话。要我们把书读好，要救国靠科学、靠本事，有同学问："胡先生为什么参加五四运动?"胡先生气得无话可云。

有消息说："冀察政务委员会"将在12月16日秘密成立，市学联通知组织"一二·一六"示威游行。这天下午我和向长清、冯泰琨、刘鹤年、沈克家等从北大三院到松江府，随队伍出南长街，传说宋哲元在景山答应学联要求，队伍又回师景山，不久二十九路军大批军队来到景山，大门也关了，山头用机枪把守，不许登山，说宋哲元来给学生讲话。我们学生约四五千人，高唱"义勇军进行曲"，"工农商学兵一起来救亡"，"同学们大家起来担负起天下的兴亡"，"我的家在东北松花江上"，"刀枪向鬼子们的头上砍去"……等革命歌曲，向二十九路军宣传抗日，抗议分裂祖国，抗议"中日亲善"，号召"打倒日本帝国主义"。到下午六点，北平市市长秦德纯来景山，代表宋哲元讲话，一套政客嘴脸，欺骗学生，会后我们知道上了当，把学生关在景山，免得上街游行，只是在群众的压力下释放了一些被捕学生而已。

"一二·九"、"一二·一六"学生爱国运动使国民党的卖国政策极大地被揭露了，"何梅协定"也销声匿迹，"中日亲善、中日提携"等汉奸口号在报纸上也不敢公开使用了，大大地唤醒了民众。

这年冬天没有复课，市学联组织部分学生去南京请愿，赴平绥线宣传抗日，我和栾汝书等去了绥远，到了包头，进了蒙古包，一片广漠无垠的黄土沙地，没有树木，没有青草，一轮落日沉在天边。感受了"北国风光，千里冰封，万里雪飘"的情景，但穷乡僻境，民不聊生，中国人再不觉醒，国亡无日矣！

我是用爱国的良心参加这次运动的，比起蒋南翔、刘祖春、湛湘汉他们就差得太远，他们以后都没有复学而去了延安，我受家庭影响，明知"放不下一张平静的书桌"，仍想科学救国。

北平古迹很多，十分诱人，我除英语听力与口语压力外，理论力学和德文也很难对付，特别是教师布置的阅读任务很重，晨跑也取消了，要不是黄中来邀我出游、溜冰，我这张书桌还是摆在长沙。"一二·九"以后没有复课给我缓冲的机会，我抓紧时间努力补救缺陷外，也游了故宫、北海、颐和园和长城，至于西山、碧云寺、十三陵、卧佛寺…等到四十年后(1975年)才和有春出游补上。可喜的是一年二期的成绩竟平均上了90分，免了二年级的学费，父亲很是喜欢，说这个儿子"到手"了！但比起李盛华稳拿杨莲府奖学金(每年三百元)还差之甚远，李盛华在中学就是我学习的榜样。

1935年春节，在北大过年，"每逢佳节倍思亲"，写信给父亲、有春以表思念。北京人老老少少都放爆竹、二踢脚，一连十多天不绝于耳。年三十夜我和向长清、冯泰昆等打桥牌，收听京剧，收音机。这年同学帮我安装了矿石收音机，可以收到

梅兰芳、程砚秋、马连良、谭富英、李多奎的现场录音，我习惯于一面听戏一面做作业，同学叫我"青衣学学青衣"，学戏比读书要容易，我学戏不过两年，基本能识谱会唱，学了六年英语，听说仍成问题；学了两年德文，两年法文却忘得一干二净。问题在于兴趣，在于有恒，唱戏有瘾，天天哼，而学外语，兴味索然且一曝十寒。

1936年寒假，湖南同学部分相约回家，在京广路上天寒地冻，都没带被子，车上客少，每人睡一条凳子，陈高林说："白胖子(白展厚)就盖付眼镜！"传为笑柄。

1937年6月我们提前考试，参加北平市大学一二年级学生军训，地点是清华大学临近的西苑，二十九军旅长何基丰是个爱国军人，主持了这次训练，我们剃了光头，接受了深刻的爱国主义教育。"九一八"事变生动地教育了国人，中国必须抗日，否则没有出路，我的班长排长都来自东北，现身说法，深受教育。7月7日清晨，我们到芦沟桥附近打靶，山后传来枪声(这就是震惊中外的七七枪声)。接着我们回营听令，何旅长声泪俱下传达芦沟桥事变。"工农商学兵，一起来救亡"，"刀枪向鬼子的头上砍去"，在悲壮的歌声中回到了北大西斋，准备离开北平。那时良乡已在交锋，平汉铁路不通，取道天津南京回家，把书籍衣物都扔在北平，仍企望下期再回北大。与黄中、刘鹤年在南京拜访了易君左游允白前辈，游览了中山陵、玄武湖、夫子庙和石头城，父亲曾告诉我石头城有幅名联：

大江东去，淘尽了千古英雄儿女；

石城西峙，依旧是六朝烟雨楼台。

特意欣赏了它，很佩服先辈的记忆。

回家以后，八一三日冠侵犯上海，北平沦陷，中日战争全面打响，学校通知在长沙韭菜园组成北大清华南开临时大学，在圣经学校旧址上课，学生租民房走读，我和刘鹤年、李廉锟、伍民璋等住衡湘里。那时名教授云集，华罗庚、陈省身、程毓淮、蒋朔民等都从英德回国赴难。这期杨武之教授(杨振宁的父亲)教《群论》，很多人都去听课，有人问华先生，《群论》讲得如何？华说"十八世纪的"，后来杨主任听到气得生病，群论课就停开了。华是杨的学生，且送他去德国留学，这五个字的贬词，引起了同学们的议论。

日冠侵华战争打到安徽、江西，学校决定迁往昆明，重组北大清华南开联合大学，当时军运繁忙，没有交通工具，师生分两路入滇，一路经广州、香港、越南去昆明，另一路步行。父亲爱子心切，虽家境不裕，仍要我走海路。刘鹤年、李廉锟、栾汝书、朱钧、赖家伟、李庆根等我们四五十人在广州岭南大学住了一个月，香港住了十天，等昆明校舍定妥后才坐海船经海防、河内入滇。在广州中山大学看望罗大凡叔叔，他是统计系主任，约我毕业后来教数学，那时中山大学在石牌，校区建设比清华还好。在香港住在山上一个小学校内。群山环抱，海浪滔滔，风景很好，只是街道狭窄，拥挤不堪。刘鹤年等去了澳门(处处赌馆，娼妓满街)，我省钱没有去。香港澳门分属英葡，但没有北平受日冠欺凌的景象，越南当时称安南，是法国殖民地，

小偷很多,法警不管。我们在海防上岸,警察检查行李时生物系同学张景轼的眼镜衣服被小偷扒去,当场警察视而不见;我雇人力车去旅社,车夫要我取下帽子,免得被人抢去,法国当局利用愚民政策统治越南,民不聊生,令人发指。我国决不能被日寇征服,我们决不能当亡国奴。科学怎么救国,远水怎解近渴,悬之胸中,徒呼奈何!从河内乘窄轨火车到了昆明,昆明就一条丁字马路,比汉寿还不如,公路也只一条路通贵阳,交通不便,如何发展生产?武汉、长沙、广州都先后沦陷,中国的希望又在何方?惶惶不可终日。有些教授如陈省身、蒋硕民、程毓淮、华罗庚和我们一道从海道而来,到联大后分别教我的微分几何,偏微分方程,近世代数和群论,他们都是世界知名的数学家,世界上都知道中国有一支强大的数学家队伍,这和当时落后挨打的中国很不相称,游子莫何之,只得向书本找出路。

当时有一群步行来滇的同学,衣食无着。大家叨光,免了学膳费,给老父一点喘息时间。昆明有西山、昆明湖,风景如画,滇池之滨有个大观楼,有幅著名的长联:

五百里滇池,奔来眼底。披襟岸帻。喜茫茫空阔无边;看:东骧神骏,西翥灵仪,北走蜿蜒,南翔缟素。高人韵士,何妨选胜登临。趁蟹屿螺洲,梳裹就风鬟雾鬓;更苹天苇地,点缀些翠羽丹霞,莫辜负四围香稻,万顷晴沙,九夏芙蓉,三春杨柳。

数千年往事,注到心头。把酒凌虚,叹滚滚英雄谁在?想:汉习楼船,唐标铁柱,宋挥玉斧,元跨革囊,伟烈丰功,费尽移山心力,尽珠帘画栋,卷不及暮雨朝云,便断碣残碑,都付与苍烟落照。只赢得几杵疏钟,半江渔火,两行秋雁,一枕清霜。

这付长联据说是清代诗人孙髯所撰,后阮元、程月川都另有篡改,各有所长,传为佳话。

西南联大教授多,开的课也多,学术空气甚浓,程毓淮、蒋朔民、樊畿就在这里一举成名。我进数学系时共四十多人,二年级时暂不入系转人十人,到昆明只剩五人(栾汝书、李珍焕、陆智常、谭文耀和我),四年级时申又枨教授教实变函数,他的讲义要我刻钢板。他在美国留学十多年,要我在文字上作些修饰。点名以后要我当他的助教。那时要写毕业论文,江泽涵主任和程毓淮教授指导我翻译德文本《Van der Vanrdan 近世代数》,这个稿子程教授修改后作为教材,这样我被留校作助教。当时日冠侵犯洞庭湖,沅江汉寿朝不保夕,父亲年老多病要我回湘去兑泽中学教书,好不容易得来助教,只得放弃,助教工作由上年毕业的王寿仁担任,后来王成为著名的数理统计学专家。我们同级的五人除谭文耀教中学外都在高校,栾汝书后来是清华大学数学系主任。

在昆明会到老同学赵翊,读高中时我报考飞行员没录取,他幸中高榜,那时已升任中队长,带我飞到大理,第一次坐战斗机背保险伞,倍感惊险,陈高林胆小没敢

去。

兑　　泽

从昆明坐汽车回湘，出了事故，上车时我的座位（司机旁边）被一个军官占了，我忍气吞声另找座位，不意行至曲靖，汽车在羊肠小路上碰到山崖，司机受重伤，这位军官惨死。同车人都说我命大。忍让使我脱险，亦云幸矣！

车到沅陵，会到黄中峙，父亲留有信件，告母亲已于先年腊月初五因病去世，怕影响学业没有告诉我，打电报催我回来也是这个缘故，我痛不欲生，在沅陵过河时晕倒落水，被人救起。回家后父亲穷病兼加，有春带两个儿子住在岳家为我奔母丧尽孝，确也非回不可，留洋梦醒，安心教中学，不作非分之想了。

兑泽中学因国难迁到澧县新洲，我接名老教师杨少岩的课教五班高中一班初中，在联大当一个月助教没有上课，现在能上讲台，倒也有趣。记得郭昆、李肖丹老师上课不带书，我也跟着学，这一点很灵，学生莫测高深，其实大学学的用不着，全凭高中一点功夫而已。有一次上高中毕业班的课，有个学生提问："杨先生教我们班时当场赋诗，青先生西装革履，又刚大学毕业就教毕业班，何不即兴作诗一展胸怀！"我当时真被吓住了，忽然计上心来，用英语继续讲课，也就混过去了，学校传为佳话。

父亲很疼爱我，要王海棠送有春母子来新洲，不久父亲也来兑泽，会到故人彭锦云校长，知道我能教书也很感安慰。

1940年春新洲大火，校舍全毁，学校迁临澧蒋家大屋，我带妻儿回青家湾，父亲一病不起，四月初八与世长辞，父亲儿女情长，一心为家，我没尽一点孝心，悲痛欲绝。清查家产，遗债三千余元。我把所有不动产三分之二给弟弟义问、义思，欠债由我偿还。把有春母子寄居在青家湾，一人去临澧，暑假兑泽再迁大庸，我请辞回县教书。

县　　中

汉寿在西竺山开办县立中学，校长傅叶尘是我初中的国文老师，留我任教，国难当头，家不能安，也只好如此。

西竺山是汉寿名胜，有大佛殿、三座大佛和千手观音在全国有名，其中洗墨池和闲亭，父亲曾携我同游，新庙前有幅对联：

"古今明月沧浪水，新旧桃花西竺山"

是乡贤诗人易实甫撰，黎丙寿书。那时县中后门贴有一联：

"惟楚有材，大厦于今要梁栋，

因树为屋，故乡无此好湖山"

也是易实甫集句，由教师徐履武书写，那时确实因树为屋，因陋就简，就伤病医院之旧址办学，可见抗战时期的艰辛。

1941年校长改任曾毅，他是湖大教授。省参议员，家居长沙，任我为教务主任，因常不在职，县政府委我为代校长，我事业心强，乐此不疲，借周箴甫、谈尚猷、符宗泽之力把县中办得初具规模，也算初出茅庐对故乡的一点贡献。那时的中一中二班以后出了一些人才，如曾训一(研究员)、李方(教授)、符宗涛(作家)、童德先(研究员)、黎体贡(总编)、饶凤林、欧阳德生(教授)、肖霈、肖志铭、曾宪章等都有建树，也验证了对联中的惟楚有材。这些学生退休后常来看我，也是我晚年一乐。有次曾训一对我说："中二中三因比球打架，学校要处分中二班学生张敏，中二班不服，全班退学，带行李在新庙门口听肖先生讲话，您只讲了一句：你们就为这件事，就这么走了呀！女同学都哭了，男同学也低头不语，就这样平息了这场风波。"旧事重温，我听来就像身历其境。

1943年我代表县中参加了衡山南岳全省中学校长会议，会到老友向长清，并在刘鹤年家作客，真如杜甫诗云：

昔别君未婚，儿女忽成行；
明日隔山岳，世事两茫茫。

1940年生女儿南平，如获珍宝，像杜工部兵车行所云：

信知生男恶，反是生女好；
生女犹得嫁比邻，生男埋没随百草。

只是对生男有些偏见而已。

汉寿东门的老屋年久失修，因陋就简改修几间，把家迁来居住。父亲晚年在此开过粉馆，由王海棠经管，终以赔本告终。父亲曾放澧县县长、省视学、中学教师，那时没有退休政策，晚年两袖清风，日子过得甚是艰难，为人子者，耗资不少，使老父受累，心实难安！

逃　难

1943年冬，日冠进攻常德，小股来汉寿骚扰，我屋被焚，我一家九口和朋友刘平旦夫妇仓惶出逃，北面是水，只得南走金牛山，在三堂街寻得一条破船，资水水流甚急，被迫扬帆(以被单为帆)顺流而东，经桃花江、益阳到达长沙，明知长沙是日冠必争之地，迫于无奈耳！暂住铁道旁九如巷马练臣舅家，又遇上日本飞机炸火车站，一家人魂飞魄散，好不凄凉。家境艰难，不能没有工作。幸遇北大校友张伯兰，他是醴陵湘东中学校长，接聘后与曾毅校长回汉寿，委托周箴甫办理移交。于1944年初带家人来到醴陵，遇到北大校友杨伯俊、向志民和故人缪礼藩(北师大外语系，常来北大，与地质系王本炎友善)。谈到北平晚报登的日商中原公司送人头的新闻。当时我们不明真相，缪承认他是主谋，畅述了事件的始末：

当时日本鬼子在北平横行无忌，日货充斥市场，市民恨之入骨。缪礼藩和王本葵在北大松公府宿舍将葛利普（地质系外籍教授）的狗杀了，将狗头装进帽盒内送往王府井日商中原公司的咖啡间，中原公司发现后停业三天也没有查出原委，市民拍手称快。我们听了惊叹不已，说缪是抗日“狗雄”。

不久日寇从江西逼近醴陵，迫不得已，我们又开始三千里路的逃亡，那时有春刚生一女，一家十一口（二子三女、保姆，表弟碧安、侄孙善初）还带两个亲戚刘申璞、马贻祖逃难到衡阳，真如《兵车行》所云：

“车辚辚，马萧萧，……牵衣顿足拦道哭，哭声直上干云霄。”

我们原想去桂林奔广西大学找刘鹤年，没想到日本鬼子已到衡山，我方准备炸掉衡阳铁桥，我们一家站在江边，没船过河，正在危急关头，遇见有春堂兄一善，他是部队军需，设法找到一只船过河，真是

“山重水复疑无路，柳暗花明又一村。”

到衡阳西站，全是难民士兵，忽然发现儿子松平走失，心如刀割，我提着马灯，找遍了衡阳大街小巷，多亏一位好心的警察把十一岁的孩子送了回来，悲喜交集。火车上人山人海，无处插针，随来的两个亲戚善初、碧安想办法在车箱下面，用绳子捆几块板子，一家十多口就挤在这危险的板子上，火车一开，真是提心吊胆，战战兢兢，好不容易盼到天明，到了祁阳黎家坪，依一善的安排再乘汽车到白水暂住，在先行一步的一善嫂子那里安身，这危险的火车实在不敢坐了，在黎家坪吃过早餐上汽车，车开不到几里，又发现三岁的南平丢了，真是魂都掉了似的，哀求司机回车到黎家坪，那时车站传说鬼子来了，已无一人，只南平坐在桌子上哭喊：“我看到你们开车，喊不应啊！”令人肝胆欲裂，更恨透了日本强盗。

在祁阳白水附近的一个小山坡下有一栋大屋，屋主已逃，我们与一善嫂子祥云两家就住在这里，天天派碧安、善初去白水镇买报，打听敌情，度日如年地住了一月，听到鬼子要打桂林，心急如焚，幸好高沙有信来，我们又开始逃亡，坐车到冷水滩，想穿过雪峰山到武冈高沙，投奔一个朋友再找工作。这段行程，因湘东中学发了全期薪俸，壮我行色，雇了一乘肩舆，有春背着月毛毛抱着南平坐轿，松平、步平等都跟我步行，过石排时知道昨天这里“关羊”，过往客商被抢一空，我们还算幸运，有春连呼爷爷奶奶保佑，原来我们还带着父母的灵牌逃难。走到一个小镇，我和申璞（有春的侄子，才15岁）用萝筐抬一个不满两岁的女儿（汉寿出生），两人实在抬不起，借称一称，只有九斤。“百无一用是书生！”好不容易走了十天，翻过了雪峰山到达高沙。这个两岁多的女儿，因病无医死在这里。只好埋葬于沟壑草丛。“无为在歧路，儿女共沾巾！”

在高沙到处写信求援，曾去竹篙塘国立三中访友，他们也要西迁，无意中遇北大友人黄步瀛，他介绍到高沙中学教物理，我有难色，他说：“堂下是一袋袋的米呢！”以后传为笑柄。在这里不到半月，传说鬼子要攻打雪峰山，学校解散，将全期

俸米发给教师逃难,在"游了莫何之"之际收到省立四中刘寄踪的信欢迎我去泸溪就教,真乃天无绝人之路,"念天地之悠悠,独怆然而涕下!"

我一行八口乘车到了湘西辰溪,寄住黄文贞家,黄是姐姐的同学,丈夫是湘西专员,她要我就职湖南大学,那时湖大迁到辰溪。我正感学的数学没用武之地,但君了处世以诚信,既已先允四中只好谢绝湖大了。

1944 年 8 月底到达山城泸溪,这次逃难从湘北老家出发,经湘东、湘南、湘西,走遍全省,历时八个月,跋涉三千里,烧了老屋,死了女儿,几乎丢失一双儿女,家财耗尽,衣物全抛,沿途忧心忡忡,惊恐万状,惶惶不可终日,白居易所云:

"时难年荒世业空,弟兄羁旅各西东,

田园寥落干戈后,骨肉流离道路中。"

正是我的遭遇,总算幸运到了偏安之窝,恨敌之心,无时或释。

四 中

省立四中原是母校(省三中),在此会到我的老师陈炳琪和故人刘寄踪、刘仁辅(老师陈兰芝的丈夫)及老同学张钟灵,甚是称心,其时陈老师病重,要我教全部高中和一班初三,只是接名师之手,并非易事,必须有所作为才无愧于心。那时难教的是裘友石编高中平面几何,其中不少难道,我一周 40 节课,晚上解题到深夜,颇感吃力,同乡学生郑英键送我一本邓文彬老师编裘氏平面几何习题解答,真乃雪中送炭,我选辑部分题目作为例题,颇受学生欢迎,后来有人称赞"青几何",其实都是邓老师所赐,有负盛名。

那时世乱年荒,敌人穷追不已,祖国前途莫卜,自己能干什么呢?"天生我材必有用",用在何方?只好一心扑在教学上,对教学法很是重视,蒙发出两种想法。其一,我受王安石诗的启发:

"春风又绿江南岸,明月何时照我还。"

李肖丹老师讲这首诗时,说王安石对其中"绿"字再三推敲,由"到"而"过",而"入"而"满",最后才想到"绿"字达到满意。我想教数学也应该如此推敲,费尽心思,设计方案,把教学内容重新布局,既讲正面,也讲侧面、反面,讲深讲透,讲到恰到好处。如果照本宣科,依样画葫芦,那要教师干什么,我听过胡适教授讲"红学",一部红楼梦,背得烂熟,他只讲观点、评论、商酌,对我很有启发,以后我将这种教法称为设计教学法,写在《教学法概论》中。

其二,我受朱熹诗的启发

"问渠那得清如许,为有源头活水来。"

教数学也应追本寻源,最好要言之有据,讲出相应的数学史,即数学内容与数学史同步,讲出来龙去脉,使学生知其所以然,以启发其创新精神,而增强教学的启发性、生动性和趣味性,以后把它称为历史轶事设计数学,还建议数学系要开设数学

史课程，包括中国古代数学史，介绍我国曾是"数学王国"，十四世纪曾执世界之牛耳。

我从这时开始，对教学特别认真，重视思考，讲究教法，把学生看成朋友，"得天下英才而教育之一乐也。"这时写了两本书，1947 年由湘芬书局出版。

1945 年抗战胜利，鬼子投降，中国胜利了，沸腾欣慰之致，这笔血债时刻铭记在心，父亲在世时对我说中国迟早要和日本打仗，真的打了，而且是八年抗战，且以我方胜利告终。

胜利后四中迁回常德，有春在汉寿生了一平，取名光宁，以纪念光复南京。此儿后来颇有出息，是光复南京振兴中华的料，足慰平生。

1946 年张孝仁任四中校长，我为教务主任，合作愉快，学校日有起色，时家住汉寿，深以无屋为苦，经多方筹措，在东门旧址修了一栋九间的砖房，算是安居乐业。"风雨不动安如山"了。

1947 年生志平，1948 年生又平，此时已五男一女，有春抚育甚感困难，不得已做了节育手术。加以修屋亏空，生活日趋艰难。

1949 年 8 月解放，松平参军。志平、又平都托人抚养，家迁住四中，房屋也向政府捐献。看到不爱读书的同学彭藩舟、彭超、陈畴因当过乡长而被处决，深感人生道路是自己走的，祸福也是自己找的。"生无益于时，死未闻于后，是自弃也"，我持司马光的观点做人教子，有幸过了这一关。

我有两个弟弟，二弟义问县中毕业后参加黄浦军校，毕业后到军队当机械化连连长，在浦口起义后回家，解放后持起义证向人民政府报到，不久参加湖北革大，结业后分配在沙洋农场工作，文化大革命中回汉寿待业，后落实政策派在乡政府工作，曾兼任县政协委员，现两老退休在家。

三弟义思在省立四中高中毕业，解放时参军，转业在吉林工作，后因病早逝。

我大学毕业后一直教书，由于工作认真扎实，1951 年评为模范教师，出任常德市教育工会主席，选为常德市总工会委员，出席省工会第一次代表大会，深感知遇。1955 年又评为省优秀教师，出席省优秀教育工作者代表大会，会到北大老友肖民颂厅长，他要我为地方做些好事，回常德后专区教育科要我培训专区数学教师，我以感激心情乐此不疲。

师　　院

1956 年春我调来湖南师范学院，因长沙师专需人上课，又借调到师专任数学教学法教研组长。因步平读大学，南平读高中，一平读初中，又平读小学，负担较重，生活仍然艰难。有春不得已在师专编写室工作，一家总算安居乐业，只是志平仍寄住在宋岁丰家，宋对志平很疼爱，把姓都改了。有春去接，宋家不放，甚感不安，此后志平也很懂事，文革时当工人，现在已是科长，作为父母，深感愧疚。

1957 年春省里王宁同志和一位记者来访，要我写文章鸣放，我写了《要百花齐放必须坚持党的领导》，5 月新湖南报发表的是《要大鸣大放关键在于领导》，内容语气也都改了，我被批得“体无完肤”，划为右派。当时想不通，在图书馆四楼，几乎跳楼。但想到妻儿生活无着，不能自私地一走了之，加以报纸发表后我没有表态否定，是咎由自取。“木秀于林，风必摧之”，这真是在劫难逃，也就自认晦气了。

1958 年长沙师专并入湖南师院，我分到资料室，我没有辜负这段时光，我大学毕业后，数学发展了，出了一些新书杂志，我认真阅读，等于又读了两年大学。1959 年国庆节摘帽，教物理系高等数学，以后又回系教数学分析、数学教学法、几何与几何基础，颇感顺心。

1966 年文化大革命开始，数学系大部分教师被揪斗争，我当然在内，我们被关进“牛棚”，失去人身自由。那时每月只发 18 元生活费，幸好女儿南平已大学毕业，她省吃俭用，供养家里，她和刘梦贤的女儿刘沙被称为知新村的两孝女。后来运动转紧，我被重戴右派帽子，深感此生休矣，我就只知教书，书是无缘了，有春也失去了工作，还有几个儿子在农村，如何养家呢？只能从劳动中找出路，靠拖板车养活他们，我认真劳动，打赤膊挖土，经过三年苦练，到 60 岁退休时能挑 110 斤煤从棉花场挑到知新村山上，身体倒比前好了。

在劳动中结识了新的知心的朋友，如葛振三、王孝迪、姚鹏飞、黄贵卿、陈孝禅，他们都是好品质、有才华、有血性的爱国知识分子，我和他们在劳动中成了知己，也共同领略了祖国的大好山河，“两岸青山相对出，孤帆一片日边来”，“枯藤老树昏鸦，小桥流水人家，古道西风瘦马”，也感受了“夕阳西下，断肠人在天涯”的情怀。

1974 年底，按政策退休顶职，将下乡九年的一平顶回师院当工人，不久，又平也调回师院，在膳食科当厨工，那时退休金每月 62 元，不够家用，有春工作了十年，也停职在家，我只好写蜡纸以补家用。

出　　游

退休前四年都在平江分院劳动，退休后忙家务写蜡纸，由于有家庭温暖，穷日子过得很舒坦自在，没有失落感，心广体胖。特别是带了两岁的孙子敏汉，晚年过得平淡有趣。

我一生没做过家务，有次切萝卜去晒，把小手指切伤了，黄步瀛笑我：“你有本事，切萝卜能切到小手指，呜呼怪哉，真有本事！”

1975 年春天外甥刘芸根从天津来信接我俩去住，我几十年没出过省，那时正补发了文化大革命扣的工资，于 4 月 19 日乘火车动身，20 日过长江大桥，21 日清晨过黄河，这是四十年前经过又十分向往的地方，兴奋不已，浮想万千。下午到达北京站。以前在前门现在移到崇文门。当时旅社对老百姓不开放，只好转车去天津，傍晚抵天津东风里，受到芸根一家热烈欢迎，他祖母已过九旬，父亲叫她老嫂

子,年轻时是热情好客的主妇,喊我琢儿,这个小名已几十年没人叫了。当时她老人家已卧床不起。玢姐去世后,兰初姐与姐夫结婚,我们亲如家人。姐弟已二十多

不会被埋没的。"至今思项羽",朋友中最为思念的就是他。解放初有"青黄不接"之说(青黄的课不好接手),青黄有之,不接则妄也!

1976年在家带孙子,常与老黄、李象乾上山(岳麓山)捡枫球子(发火),穿林过涧,貌似悠闲,其实人闲心不闲,一忧国家,二忧自己。在北平时国家多难,四处打听共产党,虽然参加过"一二·九",去过漠北,就是找不到党,好不容易盼到解放,就这样停课闹革命,与世隔绝,不务生产。国家能上去吗?这样多人能维持下去吗?也确是杞人忧天,"死去原知万事空?但悲不见九州同"(陆游),惶惶如也,不可终日。李白说"天生我材必有用",我很执着,总认为不应负此一生。我一声不吭,动起笔来,写书。老黄笑我著述等身,我仍写写停停,停停写写,有时无米,又刻点钢板,来补助家用;写书虽一时不见成效,但受益不浅,翻了许多资料,增长了才干,寄托了心思,"万卷古今消永日,一窗昏晓送流年。"这是我后半生的转折点。张楚廷(后来是湖南师大校长)在平江和我一起打赤膊挖土,文化大革命他一不造反,二不逍遥,一心读书写书,到市场要书时,他的书就出来了,李白不写诗,又谁知是何许人也!

在这方面支持我的就是有春,她把家务全部承担,让我一心写书,她虽担心没人给我出版,但从不泼冷水,说风凉话,我心存感激,使我不问收获,只顾耕耘,二人同心,其力断金。

1977年8月南平患乳腺癌,长沙医院不能确诊,我送她去北京开刀,到协和医院找过去学生刘璞帮忙,手术很顺利,我住在老朋友向长清、吴世鲁夫妇家,向是北大同班,后转学中文,当时很不得志,埋头写作,以后出了《诗品注释》等书,和我品评诗辞,受益不浅。我俩游西山,慷慨舒怀,"一览众山小"。他是沈从文的得意门生,学富五车,无人为他出书。死后才出了几本,所幸他两个儿子都出国成名,亦无憾矣!

在京会到老同学陈士林、李秀清夫妇,陈是初中同班北大同级,现任民族研究所研究员,李是联大同学,那时是副研究员,相夫教子,很是能干,南平住院她常去看望。还会到何显威、伏辉亚夫妇,何是北大同级同学,在长沙临大时常到他家作客,他有两个弟弟,约十来岁,那时外长是顾维钧。一个说顾维钩,一个说顾维钓,我们称他们是何显钩何显钓,现在他俩都住美国,谈起往事,不亦乐乎!还会到老同学吴景岩夫妇和周定一、何显华夫妇,他俩与我北大同级,常叫"青衣学学青衣",周现是中国文学研究所教授,何是何显威的妹妹,我们常到东直门外他家会餐。吴景岩曾在香港带十几架飞机于解放时起义,1957年划成右派,那时很不得意,他爱人与伏辉亚都是护士,很要好,在昆明时称"两 nurse"。同学相聚,真如清诗人王文治所云:"天下知交老更亲"。

在京偶遇故人刘唐领(北方交通大学教授),解放时约我去交大任教,常德不肯放,此时他已退休,仍译书自怡,家住房山女儿刘素梅处,我应约去访,竹林幽静,世

外桃源，杀鸡作食，以飨故人，真如孟浩然诗云：

"故人具鸡黍，邀我至田家，绿树村边合，青山郭外斜，开轩面场圃，把酒话桑麻，待到重阳日，还来就菊花。"

游。"乃一人独往。过武汉看了老同学汤世均夫妇，汤是小学同班，武大毕业后任长江水利委员会工程师，现已退休，告他黄中曾回国，很想念他。

一人走过长江大桥，向往的黄鹤楼即在眼前，仿佛崔颢在念：

"昔人已乘黄鹤去，此地空余黄鹤楼。

黄鹤一去不复返，白云千载空悠悠。"

去年两次过此，都失之交臂，此次亲临，倍感欣慰。

在汉口乘轮东下南京，船过九江，背儿时的国文："出九江城南门，望见庐山。"忆起往事：1957 年暑天民盟通知我去庐山避暑，因运动取消，我"不识庐山真面目"，何时能与相见？船过小孤山，又想起彭玉麟诗：

书生笑率战船来，江南旌旗一色开，

十万雄师齐奏凯，彭郎夺得小姑回。"

小姑指小孤山，父亲曾示我小孤山照片，并教我此诗，时光已过四十多年了，这些往事，挥之不去。

船抵南京，1937 年曾与黄中、刘鹤年来此，目前又是另一景象。会到故友李华，曾是兑泽学生，彼时任紫金山天文台副台长，帮我安排住宿，胜似亲人，同游夫子庙，得一名联：

都是圣人，且领略六朝烟雨；

暂留过客，莫辜负九曲风光。

我正是莫负风光而来的过客。

游石头城，"大江东去"，"石城西峙"的名联已荡然无存，想起一段往事：1942 年正月十五晚上，在东门老宅请瓜瓢神，竟然请来了"父亲"，在瓜瓢上绑一枝笔，这枝笔染上红土，在黄纸上写出石头城的这副名联，笔迹是颜字体，像是父亲的字，在座有义间蔡婶年青松平步平，托瓢的是我和有春，我只觉笔如有神，我随之而动，咄咄怪事，至今不解，决不是"可怜夜半虚前席，不问苍生问鬼神"。

离开南京，沿沪宁路到无锡，太湖风景，美不胜收。"好山好水看不足"，"远游无处不消魂"！有游人告诉我，要领略太湖美景，何不坐船去杭州？我不想甩掉上海，又沿铁路到了苏州。

"月落乌啼霜满天，江枫渔火对愁眠。

姑苏城外寒山寺，夜半钟声到客船。"

张继诗句导我游了寒山寺。

在上海访问了青映波，她比我大一岁，她姊妹是父亲培养上学的，她与我同班同学梅鹤结婚，梅去世后她在上海教小学，已退休。儿女都已成人，在上海工作。在交通大学会到陈之炎，他是老友陈鹿平的儿子，很是热情，当时还是助教，只一间住房住四口人，为我安排在学生宿舍暂住。陪我游了豫园、黄浦江。那时上海没什么可以玩的，一人在外动了思家的念头，"何因不归去，淮上有秋山"，上有天堂，下

有苏杭，把我带到了杭州，西湖是我这次出游的目标，父亲曾多次提到西湖，"不到长城非好汉"，不到西湖是遗憾，这次要不是黄中资助，它将与我无缘。

在杭州大学拜访了黎子耀（杭大教授）、帅芳夫妇，帅是玢姐同学，我在北大时她是北师大校花，黎陪我游了苏堤、白堤、灵隐寺、六和塔、三潭映月、花港观鱼，在楼外楼吃了鲈鱼，黎知道我以讲师退休，他说帅姐也与你一样，引李白诗安慰我："请君试问东流水，别意与之谁短长"，还说："龙岂池中物，日后必有缘"。我引朱自清老师的话答谢："但待夕阳无限好，无须惆怅近黄昏"。

医　大

杭州归来，正逢三中全会春风，引来盛世，"惟楚有材，大厦于今要梁栋"。应了黎老的话"日后必有缘"，这年我 64 岁，眼明身健，开始在电视大学教数学分析，很受学生欢迎，接着又教线性代数、微分方程、复变函数，一展抱负，乐此不疲，株洲、湘潭都有学生赶来听课，在教育厅大礼堂上复习课人满为患。书到用时方恨少，又钻研数学史，使教学增添光彩，学生很感兴趣，丰富了设计教学理论，提高了教学水平。电视大学对我的帮助很大，它还培养了我的儿子一平、儿媳谭国庆、外孙刘青、孙女宋芬，丰富了家庭的文化修养，也提高了生活水平。

湖南医学院这时恢复招收研究生，聘我教高等数学，同时炮校也来聘我，我选择了医学院，我问自己："学医为什么要学数学?"我到图书馆找答案，在外文资料中逐步得到解答，我不懂医学，好些问题需请教学生，我们交往日多，友谊日增，研究生说我的家成了第二课堂。

1981 年暑假在北京参加法国数学家沙捷斯（E.Sanchez）模糊数学讲习班，我是班上最老的学员，我第一次接受这个新的数学内容，耳目一新，以后学院要我办模糊数学学习班，我将沙捷斯的法文讲稿翻译成《模糊数学导论》作为教材，没有学院的鼓励和支持，我是缺乏胆量的，以后省数学会、省科协、省公路学会又邀请办了几次学习班，我将讲稿多次修改，在我写的《医用高等数学》中作为一章于 1986 年由湖南科技出版社出版，江泽涵老师还为我写了书评。我将模糊数学应用于医学又写成《医学模糊决策》，北京第二医学院出版，作为该校研究生教材。在这一基础上写成《模糊数学入门》，由上海知识出版社于 1987 年出版。我在外文图书中寻得许多医学问题，我写成卡片交给有关研究生研究，然后向我讲解讨论，在这一基础上又写成《生物医学数学模型》，于 1990 年由湖南科技出版社出版，以后作为研究生选修教材。

我对教学法很有兴趣，在湖南师范学院教过数学教学法课程，编过一些教材，在五十年教学的基础上写成《教学法概论》于 1992 年在台湾出版，医科大学要我讲教育学，并用此书作为教材。

医大对我很器重，1983 年评副教授，1985 年评教授，这年又评为省优秀教师，

1989年我75岁退休，以后又返聘教“医学数学模型”选科，为培训班学员讲“教育学”，到81岁才真正退下来，在家很想研究“医学数学化”问题，由于不懂医学，又无研究生请教，只得放弃，转而钻研数学史，费了三年时间写成《数学、数学家与数学思维》，于1999年由湖南教育出版社出版，同时还写了《数学史话》。

1998年8月台湾书商简琨昌来长沙找老教授写书，经学院介绍与我订合同，约稿《微积分学的理论与练习》、《数学史话》，并带去已写成的《模糊集与医学数学化》手稿。我费两年时间写成约稿，后因两岸关系紧张没有消息，只得束之高阁。

一平有个好友胡杰，也是我在电大的得意学生，请我和一平一家游庐山，这是我梦寐以求的名胜，我欣然前往，圆了夙愿。现在社会发展了，生活提高了，游人也增多了，游山马路显得太窄，山上羊肠小道，与众多的汽车不相适应，可谓举步维艰。到临鄱口坐缆车观赏鄱阳湖风光，比太湖更美，“把酒酹滔滔，心潮逐浪高”，确有“踏遍青山人未老，风景这边独好”之态，到仙人洞，主席诗句“天生一个仙人洞，无限风光在险峰”立现眼前，在主席留过影的地方，排队照了一张照片。面对《庐山》诗刻“一山雄峙大江边”，气吞山河之势，跃然眼前，令人敬仰。

“滕王高阁临江渚，佩玉鸣鸾罢歌舞。”“阁中帝子今何在，槛外长江空自流。”王勃的声音使车停到了南昌滕王阁下，唐代名阁几经修复，于今焕然一新，没想到我年过八旬，托学生和儿子的福还能到此一游。滕王阁序小时曾背诵过，“潦水尽而寒潭清，烟光凝而暮山紫”的景象又现眼前。我昔日出游，笔墨随之，现已年老，各景点的诗联未能记上，颇感遗憾。

1978年右派改正，恢复了一级工资，1983年湖南师大校长张楚廷与数学系总支书记刘衍庆来我家，说五七年我是错划的，受委屈了，向我道歉，当时新湖南报记者改了我的文章，发表的不是我的原文，记者已受到处分，我的档案都已改正销毁，以后我会到湖南医大罗嘉典校长，他说师院已通知学院，我的档案都改了，没有任何材料，只是委曲了我这些年。

从1978年三中全会“春风又绿江南岸”至今二十四年，我激励了志气，重写了历史，唤来了幸福的晚年，2002年十月初八是我和有春结婚七十周年纪念日，又荣获中南大学钻石婚纪念奖，用不完的工资，看不完的笑脸，我们的生活超过了青氏、刘氏两家的先人，祖国蒸蒸日上，晚景这边独好，无他，时代的春风，自我的勤奋耳。

我教书一生，乐趣也在师生的交往之中，我在汉寿县中教书4年，四中12年，师大22年，医大24年，朋友也在这四个学校，有次沈瑞庭（省委常委、省委秘书长）告诉我，曹庆泽（中纪委副书记，监察部长）来长沙视察，说我讲课风度翩翩，讲课只带一支笔，引人入胜，至今印象很深，要来看我。有次台湾欧阳德生（教授）来访，说“记得当年老师进教室就写先天教的杨辉三项定理：121，1331，14641，…并排成表，接着就擦去，印象很深，由于基础牢固，才有后来的成就。您是我的恩师，向您三鞠躬。”有次78级研究生曹亚、李文忠、易著文、杨旭、文冬生等来访，他们都是教授，

有的是院长，有的是全国人大代表，有的是博士生导师。真的惟楚有材，於斯为盛，“心潮逐浪高！”

晚年常有学生来访，他们是张仲陶（台湾大学教授）、李方（教授）、欧阳德生、殷杰（美国医生）、沈瑞庭、周治辅（省委副秘书长）、毛协成（省参事室主任）、刘昌进（常德市长）、刘曼婉（美国某公司经理）、童德先（军事科学院少将研究员）、曾训一（上海冶金研究所研究员）、莫振[illegible]（省电视大学教授）、陈艾如（长沙交通学院院

世同堂。这五子一女都各自成家,都买了房子,松平已离休、毛香英下岗、女儿婷婷中专毕业,在广州工作;步平以高级教师退休,曹月娥理家,两儿一女,大儿子敏汉与儿媳杨萍都学管理,在星港公司工作,也买了房子,二儿子敏升与儿媳周邵平师大计算机系毕业,在电脑公司工作,女儿青玲高中毕业在家待业;南平与女婿刘若农是矿冶学院同班,以高级工程师退休,又受聘搞工程设计,儿子刘青电大毕业搞工程;一平、谭国庆夫妇都是师大副教授,儿子青云师大计算机系毕业,在深圳电脑公司工作;志平、朱德英夫妇在石门特种水泥厂工作,女儿米芬电大毕业在长沙工作,常来看我们;又平在师大做管理员,朱美岭已退休,女儿青倩与黄国华结婚,自立门户,他们八家大都已进入小康,幸福美满,我虽然身边无人,但长沙有一平、又平、敏汉三家,他们都很孝顺,体贴入微,特别是三岁的重孙能唱歌跳舞,常来绕膝,最受人疼爱。有天来到身边,我问她:

"你爬到我这里想干什么?"

"你说呢?"

"我想你是来亲我的,是吗?"

"我现在还不走呀! 急什么?"

使太奶奶笑得直不起身,全家都笑得不亦乐乎。

啊! 太阳给了我阳光,时代给了我奋进,家庭给了我温暖,学生给了我希望,晚景非凡,能不快哉!

③ 以文会友

到医学院来，心里想的就是数学如何为医学服务，首先找到了模糊教学，生物现象和医学问题大都是模糊的，比如眼睛的好坏，如何衡量呢？最先是用“好、坏、一般”三个等级来表达，后来发展到用0.1，0.2，…，1，1.2，1.5十二个等级，也就是医学现象的量化，要数量化以后我们才能了解这种现象的程度，这是医学研究的起点和要求，普通数学有时难于做到，而模糊数学则有独到之处，在这方面我写了一些文章，因而参加了模糊数学学会，会到了许多这方面的朋友，扩大了认识，增长了才干。

在钻研模糊数学时接触到一些边沿学科，进而研究了人工智能，写了有关的文章：《模式识别与人工智能》、《论模糊数学与人工智能》、《人工智能的又一数学工具》、《可拓语言与人工智能》等在《人工智能学报》上发表。又参加了人工智能学会，朋友更多了。在参加会议中结识了广州蔡文教授，他发现了新的边缘学科“物元分析”，我有幸参加“物元分析学会”、“可拓数学学会”，也写了有关的论文发表：《论物元分析的理论与实用价值》、《论物元分析(MEA)对数学的开拓》。还担任了物元分析学会的副理事长、顾问。我还钻研了新的边缘学科——生物数学，连续发表了《生物数学简介(一)、(二)、(三)》、《从新技术革命看生物数学的发展》。又参加全国生物医学学会，并担任顾问，写了有关医学与数学的文章发表：《医疗诊断专家系统与医疗现代化》、《兔急性颅高压时颅内容积与压力的关系》、《数学在医学科研中的作用》、《论数学与医学相结合》、《数学化方法对医学进展的影响》、《试论数学在医学现代化中的作用》、《让数学为医学现代化服务》、《数学与医学及管理科学的关系》、《数学化与数学模型》、《医学数学化的崛起》、《医学数学化的基本途径》、《论医学数学化》等。关于教学法改革发表的文章有：《论设计教学法》、《历史轶事设计教学》、《给医学研究生开设高等数学课的探索》、《关于医学教学改革的探索》、《怎样把数学课上得生动有趣》、《教学法的科学性艺术性与思想性》、《论数学思维》等。《中华医学》杂志还编辑了“医学与数理科学”，选用了我发表的有关文章。国务院《学位与研究生教育》也发表了“研究生的共同导师——青义学教授”，并转载了我有关医学数学化的论著，《湘雅人物》介绍了我对医学数学化的研究以及我的教学艺术。

以文会友既参加了很多会议，会到了很多专家朋友，也游览了全国的名胜古迹。在北京到了人民大会堂，上了天安门，去了中南海怀仁堂，毛主席纪念堂，特别是参观了毛主席书斋卧室，对一代伟人倍感尊崇。他的诗词，响彻云霄：

“一代天骄，成吉思汗，只识弯弓射大雕，俱往矣，数风流人物，还看今朝。”

“君不见人民自古是英雄，螳臂挡车千钧力，庄生梦蝶一场空，看东方，火炬赤旗舞，万里红。”

主席给他侄子的信：“心胸要大些，要求自己要严些，小事糊涂些，大事清楚些”，这“四些”之论，奉为座右之铭。

在京还拜访了帅孟奇大姐（原中组部副部长），她是玢姐的入党介绍人，她询问玢姐的情况，她说玢姐是冰清玉洁的冰，她读书时自己改的玉冰，我告诉外甥芸根在天津，她让陈秘书记在本子上。

在天津看了兰初姐与芸根一家，兰姐责我：“你和南平在北京一个月，都不来天津，我要是亲姐姐，你能不来？”现在兰姐已不在人世，使我老泪横流，痛心万分。

在开封会到老同学黄同官（河南大学教授），他与王湘浩同级，说了王的情况（吉林大学校长，全国人大代表），问及黄步瀛、李盛华，我一一作了回答。现两黄都已作古，“故人不可见，汉水日东流！”

在西安游了秦始皇兵马俑、武则天陵，一代大骄，令人怀想。游杨玉环墓，卖茶老者说：杨贵妃当时并没有死，是被一太监放走后嫁作农家妇，这里埋的是她的衣冠，闻所未闻，倒也有趣。在西安会到老同学田运钧（陕西瓷厂总工程师，全国政协委员）、王颖珠夫妇，几十年不见，倍感亲切。王是湖大校花，风韵犹存，我们同游了许多名胜，以后书信往来不绝，他也是京剧戏迷，信中还写了他编的京剧诗词，我俩同去看望老友杨宗湜，杨与我在兑泽师专、师院同事二十多年。

在成都游了都江堰、二王庙、武侯祠、青城山，会到了老友李象箴，杀鸡作食，欢快有加，把我带到了四十年前的沪溪，“开轩面场圃，把酒话桑麻”，趣味横生。

在重庆去了沙坪坝，滓子洞，遍游了山城，那时的重庆很像过去的香港，在过江索道上俯瞰长江，水秀山明，快慰平生。转念父亲曾说“假我岁月，当入川追寻青姓之源”，我已在川，却未能遂先君之愿，至深怅惘。

从重庆买舟东下，经白帝城，过三峡，经神女峰、万县至宜昌。

“朝辞白帝彩云间，千里江陵一日还。
两岸猿声啼不住，轻舟已过万重山。”

李白的声音随船来到江陵，祖国山水之美，黄中说世界莫与能比，信乎，然也！祖国“江山如此多骄，引无数英雄竞折腰！”

在武汉再次会到老同学汤世均夫妇，汤问我见过黄中的夫人没有，并取来黄中与夫人的合影。我捧腹大笑，原来是黄中来我家时与有春的合影。与汤同游岳武穆遗像亭，得一长联：

撼山抑何易，撼军抑何能，愿忠魂常镇荆湖，护持江汉雄风，大业先从三户起；

文官不爱钱，武将不怕死，奉谠论复兴国家，留得乾坤正气，新猷端自四维张。

再游黄鹤楼，我对长联兴趣，小时，易老师、潘老师曾教对对子。"云对雨，雪对风，晚霞对云空"，还教了音韵平仄，说祖国文字，善妙绝伦，长联更是气吞山河，发人深省，特抄录如下：

数千年胜迹，旷世传来，看凤凰孤屿，鹦鹉苏州，黄鹤渔汛，晴川杰阁，好个春花秋月，只落得剩水残山！极目古今愁，是何时崔颢题诗，青莲搁笔。

一万里长江，几人淘尽？望汉口夕阳，洞庭远涨，潇湘夜雨，云梦朝霞，许多酒兴风情，尽留下苍烟晚照！放怀天地窄。都付与笛声缥缈，鹤影蹁跹。

到郑州会到故友熊克立夫妇。熊原是长沙师专校长，退休后与其子同居。

黄河渡口有亭翼然，名快哉亭，颇感诧异，其上有联：

数千年黄河文化，源远流长，悠也悠也！
从此能继往开来，为河山添色，正称幸事；
十来载神州浩劫，风狂雨烈，乱矣乱矣！
至今得文明安定，看景物宜人，岂不快哉！

苏辙黄州快哉亭"江出西陵，始得平地……曹孟德孙仲谋之所睥睨，周瑜陆逊之所驰骛……"显然在长江之滨，此亭非彼亭也！

广州前后去过六次，一次开人工智能会，三次物元分析，一次生物数学，一次作医学数学化报告，游过深圳、珠海、中山、肇庆、佛山、东莞、度假村、海上世界，会到蔡文（物元分析学会理事长）、汪培庄（模糊数学会理事长）、方积乾（生物数学会理事长）、梁启燚（暨南大学教授）、王湘浩（北大同学，暨南大学兼校长）等老朋友，也会到乡亲刘际圭（有春的侄子）、蔡以宪（蔡焕斗叔的儿子）和易征。易是汉寿文豪易君左之子，现任现代人报社长，他著的《文学絮语》文笔有乃父风。

在杭州会到老同学成泰山的女儿，骑她的自行车遍游了西湖，在上海会到了老友曾训一（教授），陪我游黄浦江、豫园，他家所在地在马路边，地价升级，成了百万富翁，但他要住居，无法享受，仍然是工薪阶层。

从上海乘飞机去大连，路过青岛，停了一个多小时，不能欣赏青岛美景，望城兴叹而已！

大连是仅次于青岛的美丽的城市，当时很乱很脏，我们排队买去旅顺游览的车票，第二天上车，说是假票，只好望旅兴叹。听说现在治理得很好，重庆也一样，国家兴旺发达，快慰平生。游艇载我绕大连旅顺海滨一游，"落霞与孤鹜齐飞，秋水共长天一色"，总算不虚此行。在海边拾得贝壳一袋，勉强对有春有个交待，可惜我没学会游泳，不能下海，这既是祖母所禁，对自己也是一大憾事。

在沈阳看了满清旧宫,仿北京故宫而建,可见满人早已觊觎中原想为人君。几千年来,争战不休,胜者为王,大修宫闱,今天才见到为人民谋福利搞建设的政府。

到长春访问老同学王湘浩,他已南去,家是一栋别墅,有花园,有车库和传达室,同学中有此条件的极少,刘祖春、孟庆基(一汽创始人)也不及也。

在哈尔滨见到沿江浮雕都是裸体女像,我曾在北京美术馆看过一次裸照展览,以后议论纷纷。我读书时听说德国法国曾有裸体游行,这种风尚与我国传统两相背驰,有些艺术家作过努力仍无济于事。松花江上会到表弟符宗涛、陈碧芳夫妇,两人都是作家,畅谈胜过游览,心旷神怡,以后他来长沙看望,又去美国探亲,现退休在北京定居。

在桂林会到老同学刘鹤年,他正在传达室取信,他说:"你不是青衣学,他是个瘦子,学青衣。"风趣犹存,还说:"老朋友,我不能陪你游山玩水,我老得走不动了;也不能请你吃饭,老伴正生病,要去医院!你怎么不老呀?我只比你大三岁!"以后我们还有书信往来,后来他儿子来信说母亲去世,父亲卧床不能言语,这就是人的归宿吗?"死后原知万事休","一窗昏晓送流年!"可慨也夫!

在厦门见到厦门大学被炸的遗址,金门就在对岸,如此咫尺对立,两岸都是同胞,何年才得团圆?现在香港、澳门都已回归,就此一席之地未归,中国必须统一,台湾乎归去来兮!陆游有诗:"但悲不见九州同",于我心有感之焉,"家祭勿忘告乃翁",台湾回归之日,乃翁又安在哉!

张家界去过两次,一次是同葛振三去大庸开会,想起父亲曾去大庸放赈,他诗中有"大庸城外有方山",去游一看果然方山林立,沉睡几千年的风光,今逢盛世,也东山再起。在吉首大学会到老友吴世泽教授(他父亲吴延梅是我的老师、先父同学),南岳校长会议上我与吴和向长清同游过磨镜台南天门。

另一次是与有春去常德讲学,老同学马以诚校长派车再游张家界,同行的有夏一尘及翠姐夫妇,这次还遇到多年不见的故友陆训寿(常德统战部长),他派车我同有春游了桃源洞,"缘溪行,忘路之远近,忽逢桃花林,夹岸数百步,中无杂树,芳草鲜美,落英缤纷。"今日仅有桃花林而已,游人栉比,不复有"世外桃源"矣!桃花源我初中时曾集体来游,那时跳跳蹦蹦兴致很高,国文老师问我们有谁能背《桃花源记》,有十多人举手,现在的初中学生能背的恐怕"遍插茱萸无一人"了。

④ 人贵有志

我出生在祖国蒙羞的年代，父亲对我的影响很大，我青氏始祖文胜公忠君爱民，父亲常说："官不在卑，而在能称其志，人谁不死，而在死得其所，人生在世，切忌贪财，利害祸福，不应顾虑于心，所虑者唯国之存亡百姓的疾苦而已，尔当立志，兴我中华。"父亲一身正气，两袖清风，他是这样说的，也是这样做的，七十年过去了，言犹在耳。

那时的老师都是爱国的，给我们讲中国近代故事，特别是九·一八事变，日本亡我之心不死，已有几千万人做了亡国奴，一定要发奋读书，科学救国，力挽狂澜，中国人必须站起来，打败日本鬼子，我国有五千年文明史，其所以常盛不衰，就因为代有志士仁人，打败侵略者，救民于水火。我的家族观念也很重，光宗耀祖的观念很深，"忠孝传家，忠国孝家"，把家和国连在一起，我在这种思想的教育与熏陶下成长，有志才能成材，有志才能救国，一定要为国家民族的兴亡而发奋读书。

上海"一二·八事件"发生，我正在一中读书，想要投笔从戎，报考了空军，因身体不合格而被淘汰。在北大受不了日寇的欺凌而参加了一二·九运动，到平绥铁路线宣传抗日，后因家室之累，仍在科学救国路上徘徊。教中学时感到所学无用武之地，日寇节节进逼，带着一家人何以为生，曾一度消沉。父执彭维基叔（中南工大教授）曾劝我不要打牌、玩物丧志。又鼓起勇气写书，湘芬书局为我出了两本书，即《新解析几何学》（英译本）、《高中数学复习讲义》，其稿费帮我修了东门的房屋。

立志是一生的事，而人的一生又是曲折多变的，有志才能应变，才能化险为夷而立于不败之地，1957年划为右派，曾一度想到自杀，是妻儿救了我，家庭观念救了我，也是"天生我材必有用"救了我，是"人贵有志"的观念救了我。退一步想柳暗花明，果然邓公复出，使我重生，在教书之余，还写了书，写书不是闭门造车，要有新意，要符合时代要求，凭我原有知识是写不成的，由于我教医学研究生，要考虑他们的需要，特别是长远的需要，我围绕着研究生长远需要这个问题，学习模糊数学、人工智能、物元分析，这才使所学的数学有用武之地，这是"人有远志"所致，没有这个远志，依然故我，一事无成！可见人贵有志不是一句空话，做起来并非举手之劳，需要有毅力、有恒心、有耐心，要能经受失败的考验。

一平、国庆他两夫妇有点像我，一平高中毕业，插队落户下乡九年，我退休他顶职来师院当工人，恰逢电大招生，他考上了，半工半读，毕业后调物理系当工人，根据表现提了干，在实验室工作。由于他有志气，勤于读书，勤于工作，系里让他教物理实验。那时附中和长沙一中请他培训参加奥林匹克的学生，他教的学生在国际

上得了金奖、银奖(1989年银奖1枚,1990年铜奖1枚,1992年金奖2枚,1993年铜奖1枚,1994年银奖1枚,1995年金奖1枚,1996年金奖1枚,1998年金奖1枚,2001年金奖1枚,2002年金奖1枚),他又出版了《物理奥林匹克赛实验教程》,《奥赛经典——物理奥林匹克实验教程》,评为副教授、优秀辅导员、省优秀教师。天津、海南、广州等地请他讲学。他的教学比我还好,在师大算是为我争了气。国庆也是下乡九年顶职回师院,电大毕业,也由工人提干,又在武汉大学函授本科毕业,评了副教授。两人都是勤学苦练有志之士,重写了自己的历史,改善了生活,也培养了他们的儿子(师大计算机系毕业,现在深圳工作),我们三人志同道合,使彼此的家庭过得幸福。要说我有什么经验向后人推荐,那就是人贵有志,人贵有恒,有志才能勤奋,有恒才能乐此不疲。

人贵有志,要从自重自尊开始。李白所谓:"天生我材必有用"。就是说人要自重,如果一个人连自己都看不起,还有什么志气可言!

一个人的成就,除了有志、自重和勤奋外还要善于把握时机,有些时机,是明显的,如"少年时",有的孩子懂事得早,有的就不是,要靠父母,做父母的千万不可听之任之。又如"惜阴",在一个人的手中不知放走了多少光阴!我晨跑时记英语单词、背诗,不知不觉地增强了自身的能力,光阴如流水,惜则得之,不惜则不得也!

把握时机还在于顺应潮流,如"盛世出贤材",解放后的被压迫者如雨后春笋般成长起来;上面号召让一部分人先富起来,中国就涌现了民营企业家。我和一平是三中全会春风雨露下的受益者,但是,人若无志,又不会把握时机也就失之交臂了。

人贵有志是我国几千年来形成的爱民族爱国家的优良传统,大家熟悉的一首歌"我是中国人"就是我们中国人的志气,也称"中国魂"。我们做教师、做父母的就是要培养青少年这种志气,有志者事竟成,振兴中华才水到渠成。

⑤ 勤以补拙

我小时候读《人手足刀尺》的书，总要念人字手字……去不掉"字"，父亲说我蠢，我背书也比别人慢，天资很差，身体很弱，体力更差，潘老师告诉我，"笨鸟先飞，勤以补拙。"

王悠然老师是我初中高中的体育老师，对我很关心，有次对我说："小家伙，我叫你皮包骨，不高兴吧！身体发肤，受之父母，但它是可以改变的，要靠锻炼，才能强身，我叫你皮包骨，是要你改变这个形象！"他的辰溪口音，言犹在耳。我听老师的话，打球晨跑，练了六年终于改变了"皮包骨"的形象，在文化大革命中参加劳动，也用勤字克服了肩不能挑的毛病，可以挑煤上山了。

读高中时听到岳云中学的数学用的是霍尔乃特大代数、二氏解析几何。我们用的是范氏大代数和三氏解析几何，我把这四本英文书的题都做了，果然勤以补拙，数学成绩上去了，在北大按照教授们的介绍阅读了一些参考书，"旧书不厌百回读，熟读深思子自知"，数学水平也提高了。听李肖丹老师的话读了一些古典文学(庄子，淮南子、韩非子、吕氏春秋、资治通鉴)，写作能力也增强了。在文艺中学背了许多英文短文选，以后阅读外文能力也提高了。这些都要花费时间，其实一生中不知要虚度多少时日，只要以珍惜寸阴的精神，争分抢秒，特别是珍惜少年时光，以后可以赢得更多时间，做更多更好的事，是最为值得的。

勤还要勤于思考。孟子说："心之官则思，思则得之，不思则不得也。"初中时邓文彬老师讲平面几何，用思字引路，对我启发很大，我在邓老的教导下用作辅助圆的方法解出西摩松线，受到鼓励，对我刺激很大。我在晨跑时背英文单词，体育老师英文老师都表扬我，于是爱惜时间用心思考的劲头更大了。"《淮南子》说："欲致鱼者先通水，欲致鸟者先树木，水积为鱼聚，林茂而鸟聚"，以水聚鱼，以木引鸟，以勤补拙，以思促学，学习效果也与日俱增。

我在讲教学法时说，教学法是想出来的科学，思则得之。在讲几何与几何基础时，举了很多作辅助线的例子，并归纳出几条规律，学生很是满意。讲数学史时，讲数学的四次重大进展：从常量数学到变量数学，从必然数学到或然数学，从明晰数学到模糊数学，从无生命数学到生物数学。讲数学模式归结为公式化模式、双轨迹模式、方程模式(笛卡尔模式)、递归模式、叠加模式，这些都可谓思则得之，得才有所前进，有所创新，有所发展，思可谓是科学之源，创新之本。

我教医学研究生数学，但不懂医，在图书馆参阅外文资料时发现许多例子用数学解决医学问题，我不知其所以然，在困窘中想出一个办法，把这些问题分类写成

卡片,交给各科的研究生要他们研究并请教指导老师,再讲给我听,我先当学生后当先生,研究生把我家视为第二课堂,这样才有我编写的《生物医学数学模型》的问世,这也是“思则得之,不思则不得也”。

思是有前提的,精神状态不好,情绪紊乱是懒得思考的。人的精神状态很重要,心理学把人的气质分为四种基本类型:胆汁质、多血质、粘液质和抑郁质,前两类具有外倾性,直率、热情、活泼、好动,后两类具有内倾性,安静、沉默、孤僻、保守。明白自己的气质才能有效地调整精神状态,所谓“退一步想,海阔天空”,就是要人们乐观豁达,忘掉前嫌,从烦闷中解脱出来,严格地说是要转变气质,调整情绪,做不到这一点,仍然钻死胡同,永远看不到“柳暗花明又一村”。

中国传统医学认为:通则不痛,痛则不通。养生之道要求全身通畅,即思想通、气血通、神经通、经络通、排泄系统通等五个方面都要通畅。养生之道又分养身、养心两部分:养身即协调生理机能,保持身体健康;养心则要保持良好的心理情志,保持乐观情绪,维持心理平衡。科学实验证明,一个人的消极情绪如果不及时宣泄疏导,它便作用于中枢神经,通过交感神经、内分泌系统等降低人体防御、免疫、监视等功能,疾病便乘虚而入;反之,一个乐观、豁达、遇事想得开的人可以增强防御、免疫、监视能力。孔子一生坎坷,在陈绝粮,仍处之泰然,弦歌不绝,问他何以如此,他说“乐以忘忧”。历代帝王都想长生,长生是不可能的,延年益寿则是有术的,过去人生七十古来稀,现在大不相同了,认为人的自然寿命可达二百岁,健康与长寿,7%取决于环境的影响,8%取决于医疗卫生条件,10%取决于社会因素,15%取决于遗传基因,而60%取决于自己的调节,养生是有术的,术在锻炼,术在养心,术在乐以忘忧。

我在不如意受压时,情绪波动,心情沉重,戏也不唱,诗也不哼了,垂头丧气,意志消沉,我反问自己:“问君能有几多愁?”“抽刀断水水更流”,穷愁潦倒能解决问题吗?个人面子真重于泰山吗?钻牛角尖只能“举杯消愁愁更愁”,且看李觏的乡思:

“人言落日是天涯,望极天涯不见家。

已恨碧山相阻隔,碧山还被暮云遮”。

那是钻牛角尖的典型,只能抒发乡思之苦,无助于事,好比一个女人总怨自己不该是女人。现实一点吧!七思八想,还是退一步想好,现实一点好。想通了,头昏耳鸣都不见,柳暗花明心也宽。

我教书五六十年,可谓勤勤恳恳,无论教什么课,新课或是旧课,都有完整的教案,课前慎思,课后总结,从未间断,我认为人要有所作为,志、思、勤三者缺一不可。

第一篇
数学的发展及其实质

当我们开始学习代数几何时，往往有一种感觉，什么是数学？它有哪些内容？又是怎样发展的？有没有数学史？我国过去有没有数学？这类问题，书上从未涉及，困惑了许多青年。

学数学要学点数学史，才懂得数学的来龙去脉，才知道数学思维的规律，心里才踏实，才能真正学懂数学，特别是吸取数学家成功经验、学习方法与治学精神，才能有所领悟，有所创新。

教数学更要掌握数学史，在教学中结合教学内容，讲点数学史话，更能把数学讲活，学生听得有味、懂得透彻，才能爱好数学、学好数学。

我国是世界文明古国之一，历史悠久，人民勤劳勇敢，为人类作出了巨大的贡献，指南针、造纸术、印刷术、火药等四大发明，举世闻名，人所共知。但对我国古代数学的成就，则知之不多。这段历史，应该让青年学生知道。扩展爱好数学的队伍，继往开来，让数学之花，更放光芒。

本篇想针对这些问题介绍什么是数学，数学有哪些内容，数学的几次重大进展，微积分学级数论、复变函数论、实变函数论的发展简史，中国的古代数学，著名数学家选介等。一则满足青年们的愿望，丰富他们的知识，增强创新意识，二则帮助数学教师，丰富教学内容，活跃课堂气氛，提高教学艺术。朱熹有诗："问渠哪得清如许，为有源头活水来。"教数学要讲得有根有据，要与数学史同步；教数学还要费尽心思，设计方案，使课堂布局恰到好处，使自己满意，学生高兴，家长放心。像王安石对"春风又绿江南岸"诗句中的绿字，再三推敲，由"到"而"过"，而"入"而"满"，最后才想到"绿"字。教学要发扬这种推敲设计精神。

作者教书六十多年，教训不少，晚年才悟出教学要与数学史同步。仅以此篇作为对数学教师与青年的礼物，可否认为"史在冥冥之中，固有昭昭者存"，望共勉之。

1 数学是科学的大门和钥匙

1.1 数学的定义

"什么是数学?"这个问题的含义是要给数学下个定义。前人作过尝试,都不够理想,恩格斯在《反杜林论》中写道:"数学是数量的科学,它从数量这个概论出发"、"纯数学的对象是现实世界的空间形式和量的关系"。于是人们定义"数学(Mathematics)是研究客观物质世界的数量关系和空间形式的科学"。现在数学研究对象日趋广泛,表现形式也更加抽象,这个定义是否适合,还无定论。

"为什么学数学?"从自然科学发展的初期发现,每个数学家都是哲学家,如亚里斯多德、笛卡尔、墨子。要了解人与自然的关系,以及人在宇宙中所处的地位,首先要研究数学,因为数学可以帮助人们在混沌中找到秩序,按逻辑推理求得规律。西方文艺复兴时有位科学家拉伦多(Leonardo, 1452~1519)说:"只有紧紧地依靠数学,才能穿透那不可捉摸的思想迷魂阵。""为了超越观察和经验而作进一步探讨,只有一条可靠的路能避开幻景和错觉,那就是数学。"他把数学作为当时分辨科学与诡辩的试金石。古代哲学家罗吉尔·培根(Roger Bacon)有句名言:"数学是科学的大门和钥匙。"作了简单而实际的说明。

1.2 科学的本质是数学

17世纪欧洲的科学家已注意到数学在自然科学研究上的重要性。笛卡尔(Desscartes,1596~1650)说:"科学的本质是数学。""世界是可以认识的,并可归结到数学。""物质的最基本的和最可靠的性质是形状、延展和在时空里的运动……给我延展和运动,我将把宇宙构造出来……由于延展和运动都可用数学表示,所以一切现象都可用数学描写出来。"

伽里略(Galileo,1564~1642)在他的著作《关于两门新科学的探讨和数学证明》中把科学探讨和数学证明作为科学研究的两个重大步骤。后人把只有前者而无后者称为经验科学(或前科学),两者俱备的,才是真正的科学。

这里引一个生物学家孟德尔(Mendel,1822~1884)探索遗传律的例子来阐明以上的论点。

孟德尔费了8年时间作豌豆实验,用统计方法发现显性性状(R)与隐性性状(r)数量之比为2.98:1,近似等于3:1。称之为孟德尔分离性定律。当时受到一些

非难：3:1 是近似值还是精确值？统计方法的结论可靠吗？是否具有一般性？孟德尔也不能回答。事过 15 年才由数学加以证明：

$$(R+r)(R+r)=RR+Rr+rR+rr \rightarrow R+R+R+r=3R+r\ ,$$

$$\therefore\quad R:r=3:1\ 。$$

至此，孟德尔遗传律就成为真正的科学而为科学界所接受了。

伽里略还有一个重大的见解为后世所接受。他认为：任何科学分支应效法数学，从公理出发，通过演绎推理而建立新的真理。科学要臻于完善，必须把数学纳入自己的范畴，仿照数学的结构，借数学的推证来改造科学，这就是科学数学化(Mathematizing of science)。

1.3 科学数学化的潮流

科学数学化的潮流是从物理学数学化开始的。

现在我们常说科学研究已从定性研究发展到定量研究，是伽里略开倡的，是一个革命化的进程。

伽里略选择了一组可以测量的概念：距离、时间、速度、加速度、力、质量和重量，使得它们的测度可与数学公式联系起来。伽里略用概念、数学描述来研究物理学，使物理学的研究上了一个飞跃的台阶，不愧为近代科学方法论的奠基人。

牛顿(Newton Isaac，1642～1727)发展了伽里略和笛卡尔的思想，放弃物理的机械解释改用数学的描述，定义速度 $v=\frac{ds}{dt}$，加速度 $a=\frac{d^2s}{dt^2}$，力 $f=ma$，……将科学中的实际问题数学化，使物理学插上"数学翅膀"得以腾飞，成为 18～19 世纪的带头学科、科学数学化的尖兵。美国物理学家狄森(Dison)说："贯穿整个物理科学的曲折变化的历史，有一个仍然不变的内素，就是数学想象力的绝对重要性，每个世纪都有它特有的科学预见和数学风格，物理学的主要进展是在直接经验的观察与数学化相结合的引导下取得的。"

物理学数学化的辉煌成就，鼓舞了其他学科。接着数学化的学科有天文学、化学、工程学、计算机科学等，生物学、医学、现代管理学、经济学乃至社会科学的数学化也在起步。且看关于人口增长的研究。

据生态学研究，人口随生产的发展，世界人口增长情况，有如下表：

时　期	基本数字	翻番情况
农业社会以前	人口不到 1000 万	1700 年翻一番
农业社会	公元初人口 1.5 亿；1300 年人口为 5 亿	晚期 200 年翻一番
工业社会	1600 年人口为 9 亿；1977 年人口为 43 亿	35 年翻一番

我国明代徐光启(1562～1673)说:人口大抵30年加一倍。英人马尔萨斯(Malthus,1766～1834)利用当时的微积分、微分方程,从瑞典的人口统计资料出发,设N表某时刻t瑞典人口总数,建立微分方程:

$$\frac{dN}{dt}=kN,$$

设初始条件 $t=t_0$ 时 $N=N_0$,解出:

$$N(t)=N_0e^{k(t-t_0)}。$$

据此,提出人口按几何级数增长的理论,称为马尔萨斯人口论,引发了控制人口的理论,给世界敲起了警钟。

事实上,人口的增长受到多因素的制约,如环境、战争、瘟疫、医疗卫生条件等的影响,以后又修正为Logistic方程

$$\frac{dN}{dt}=rN(1-\frac{N}{K}),$$

解出得

$$N(t)=\frac{k}{1-(1-\frac{k}{N_0})e^{-rt}}$$

按此模型,据我国1982年人口普查统计

$$N_0=10.3(亿人)$$

到2000年要使人口控制在12亿左右,r 应为0.05%,即人口增长率应控制在0.05%以内,与我国实际相符。

这个例子使我们耳目一新,可谓科学研究已离不开数学了。马克思早就断言:"一种科学只有成功地运用数学时,才算达到真正完善的地步。"美国近代科学家冯·诺依曼也说:"在现代实验科学中,能否接受数学方法,已愈来愈成为该学科成功与否的主要标准。"联合国教科文组织在1983年的调查报告中说:"目前科学研究工作特点之一是各门科学的数学化,它已成为科学发展的新潮流。"

1.4 数学的特点和作用

数学是科学的本质也是科学的工具,是由它自身的特点决定的。数学的特点可概括为:结构严整、结论明确、应用广泛,也就是科学性、真实性和实用性。数学家克莱因说:"数学知识不但是绝对真理,而且每句每行都是神圣不可侵犯的。"它既是检验真理的工具,也是探求真理的工具;既是论证计算的工具,也是训练思维的工具。数学可以描述科学概论,可以推理论证,可以构成新的理论。这正是人工智能的三大技术:知识表示技术、推理论证技术和系统构成技术。其作用之广、地位之显著是无可置疑的。

数学的源泉，一是科学实践，二是自身理论与方法的需要，科学实验不断向数学提出新的问题，促使数学研究新的对象，也促进了数学的发展，数学过去的固定界限一再被打破，数学的地位与作用也发生了变化，越出了自然科学的范畴。有专家提出，现代科学应分为自然科学、社会科学、数学、人体科学、思维科学与文艺科学六大类，数学由附属于自然科学而独立门户了。

2 数学的起源

2.1 记数法(含算术)

恩格斯在《反杜林论》中写道:"数学是从人的需要中产生的,是从丈量土地和测量容积,从计算时间和制造器皿产生的。"远古时期人类为了生存而寻找食物,在狩猎中感到有记数的需要,知道种植以后,感到需要丈量土地,于是数学应运而生。

古埃及位于尼罗河两岸,尼罗河定期泛滥,七月水涨,淹没了谷地,十一月水退,土地上遗留肥沃的淤泥,一月在松软的土壤里播种,秋天可获得好的收成,经过多年的观察,积累了许多天文知识,乃有历书的起源,一年有365天12个月,这也和记数有关。埃及人很早用十进制,这与人有十个手指分不开,埃及人那时没有位置值的概念,如111记为 $C\cap 1$,C 表100,$\cap$ 表10,记大数就更麻烦了。

古巴比伦(现在伊拉克)位于亚洲西部底格里斯河与幼发拉低河之间,称两河流域,也是人类文化的摇篮,古巴比伦用的是60进制,如

$$1.4 = 1 \times 60 + 4 = 8^2$$

$$1.21 = 1 \times 60 + 21 = 81 = 9^2$$

用 $\bar{Y}$ 表示1,$\prec$ 表示10,$\prec\prec\bar{Y}$ 表示21,$\prec\begin{matrix}\bar{Y}\bar{Y}\bar{Y}\\ \bar{Y}\bar{Y}\bar{Y}\end{matrix}$ 表示16,$\bar{Y}\ \prec\prec\bar{Y}\ \prec\begin{matrix}\bar{Y}\bar{Y}\bar{Y}\\ \bar{Y}\bar{Y}\bar{Y}\end{matrix}$ 表示 $1 \times 60^2 + 21 \times 60 + 16 = 4876$,对大数的记法,也是很烦难的。

在公元前1800年巴比伦国王汉穆拉比时代的泥板上发现有二次联立方程问题:"两个正方形面积之和是1000,其中一个的边长是另一个边长的2/3少10,问各长多少? 答30,10。"这相当于解方程组:

$$x^2 + y^2 = 1000, y = \frac{2}{3}x - 10 \quad 。$$

从公元前1500年的泥板上发现当时已知道 $(a+b)^2$ 的展开式,一般勾股定理,能计算矩形、直角三角形、梯形的面积,平行六面体、柱体的体积。

古罗马(现意大利)三面临海,是适于种植的好地方,也是世界文明古国。罗马数字在印度阿拉伯数码输入(16世纪)之前一直是欧洲通用的数字,用 I, ∇, X, L, C, D, M 分别表示1、5、10、50、100、500、1000,235要写成 $CCXXXV$,235×4 要写成

$C\ C\ C\ C\ C\ C$

$X\ X\ X\ X\ X\ X\ X\ X\ X\ X\ X\ X$

$V\ V\ V\ V$

再合并，得到结果 $DCCCCZL$(940)，中世纪有人厌恶这种烦琐的数学，有诗为证："乘法原可恼，除法亦不良；黄金律[1]，太讨厌，练习真使我发狂。"

古印度西临阿拉伯海，东临孟加拉湾，南临印度洋，恒河流域土地肥沃，热带雨林气候，适于耕植，也是世界文明古国，印度数字 1,2,3,…,9,0，零(0)是位置制记数法的精髓，印度数字输入阿拉伯后，欧洲都称阿拉伯数字。

公元前 500 年印度已知道勾股定理和勾股数，即满足 $x^2+y^2=z^2$ 的整数组，$\pi \approx \sqrt{10}=3.162$。

古代中国七千年前在黄河流域已有农业、畜牧业，会制造彩陶，陶器上有各种几何图案。

公元前 500 年我国最早使用位置制的十进制，那时使用的算筹是：

纵式	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
横式	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

6728 记为𝍥𝍦𝍪𝍧，6708 记为𝍥 𝍦 𝍧，空一格的地方表示零，空格读为零，只是没有〇这个数码，后来用口记为零。1180 年金《大明历》中以〇作零号，如 403 写作"四百〇三"或𝍫〇𝍢。1247 年秦九韶《数书九章》记 3076800 为𝍢〇𝍦𝍥𝍧〇〇，这个〇号是我国自己的创造，〇注为零，与印度—阿拉伯数码的扁圆 0 也不相同。

算筹后来发展成为珠算，利用口诀进行计算是中国数学的一大特色。流行久远的口诀是乘法口诀，俗称九九表。公元前 700 年《荀子》、《淮南子》、《战国策》中就有"三九二十七"、"六八四十八"等句子。

分数与小数

我国自古就重视历法，每一年的日数、月数都不是整数，都要用到分数。公元前 246 年的颛顼历，以 $365\frac{1}{4}$ 日为一年，一年有 $12\frac{7}{19}$ 月，每月的平均日数是 $29\frac{499}{940}$。

《九章算术》给出了分数运算法则：约分、合分(加法)、减分(减法)、乘分(乘法)、经分(除法)、课分(比较分数大小)、平分(求分数平均数)。

刘徽注《九章算术》(263 年)中说："微数无名者以为分子，其一退以十为母，其再退以百为母，退之弥下，其分弥细。"即开方开不尽时用十进分数(小数)表示，比斯提文(Simon stevin，约 1548～1620)早 1300 年。

2.2 几何(含数论)

我国在公元前 2000 年就有规矩之说。《史记》卷二《夏本纪》记载夏禹治水时，

---

[1] 黄金律即三率法，即一个比例式已知三项求第四项的方法。

"左准绳,右规矩"。规就是圆规,矩由长短两尺合成,相交成直角。《墨子》卷七载:"轮匠执其规矩,以度天下之方圆。"《孟子》载:"离娄之明,公输子之巧,不以规矩,不能成方圆。"可见春秋(770~476B.C.)战国(476~221B.C.)时代,规矩已被广泛使用。

春秋战国是我国由奴隶社会向封建社会转变的时期,普遍使用铁器,农业、手工业、水利、冶金都随着发展起来。在学术上,诸子蜂起,百家争鸣,其中《墨经》是最富有创见的科学书籍。

墨子

《墨经》阐述鲁人墨翟(478~392B.C.)的学说,书中载有原始几何的论述:

"平,同高也。"——平行线是两条在每一处距离都相同的直线(也可是平行平面)。

"中,同长也。"——线段上的一点到两端等距,这一点叫做中点,对圆就是圆心,对球就是球心。

"圆,一中,同长也。"——圆(球)有且只有一个中心,它和圆周(球面)上每一点的距离都相同。

"端,体之无厚而最前者也。"——端是几何的点,是物体的尖端,它位于物体的最前面而没有厚薄和大小。

"体,分于兼也。""体,若二之一,尺之端也。"——体是形体,可作图形讲。分是部分,兼是全体,图形是由部分组成的。二之一是将图形平分,尺是线段,端是点,将一条线段,一半一半地分下去,最后将得到一个点,即点是线段无限分割的极限,这是区间套原理的雏形。

"穷,或有前,不容尺也。"——穷就是有边界的区域,如果沿着某一方向用尺去量这区域,一定能够量尽。

"穷,或不容尺,有穷;莫不容尺,无穷也。"——穷,是能够量尽的区域,也叫有穷;如果永远量不尽(莫不容尺),必定是无穷。

这和阿基米德(Archimedes, 287~212B.C.)原理的意义相似。

"小故,有之不必然,无之必不然,体也,必有端。大故,有之必然,若见之成见也。"——小故是必要条件,有了这个条件不一定有这样的结果,但若没有这条件就一定没有这样的结果。例如有点不一定成直线,没有点,就一定不成直线。大故是充分条件,有了这种条件就一定有这样的结果。例如,有了看的动作,就能看见东西,看是看见的大故。

春秋战国时代,思想界十分活跃。稍后于墨子的庄周著有《庄子》,他在《天下篇》中写道:"一尺之捶,日取其半,万世不竭"。——一尺长的棍子,第一天取去一半,第二天取去剩下的一半,以后每天都取去剩下的一半,这样永远也取不尽。这个论断就是数列极限的思想,即:

$$\lim_{n\to\infty}[1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n})]=0 \quad 。$$

古代中国的几何,平面图形称为田,正方形称方田,矩形称广田或直田,三角形称圭田,梯形称斜田或箕田,圆称圆田,可见那时认为几何是由田亩面积的度量和实物体积的计算所引起的。

西欧称几何为 Geometry, 1607 年清徐光启和利玛窦合译欧几里得《几何原本》时取 geo 的音译为几何(Geometry)。日本中村正直(1832 - 1891)在《几何学序》中记载:"几何者,问多少之义。算学者,则亦当用此字。何独察物形之学而称几何也?英国艾约瑟先生偶见访吾庐,语次及此。先生曰:希腊语 GEO 者地也,几何音仿佛 GEO,盖或由是用此字也。"

塔利斯

西欧的几何学经历了几百年的艰苦历程才出现欧几里得的《几何原本》,这里首先介绍希腊学者塔利斯(Thales,640 - 546B.C.)。他是希腊哲学家的鼻祖,又是天文学家和数学家。当时美地亚国(Media)和吕地亚国(Lydia)发生战争,连续五年,横尸遍野,哀声载道。塔利斯预先知道 585B.C.5 月 28 日将有日食,便扬言上天反对战争,这天将用日食来作警告。果然到了那天,两军在酣战,突然太阳失去光辉,百鸟归巢,白昼顿成黑夜,双方士兵大为恐惧,于是停战和好。

塔利斯在埃及时,应用两个相似三角形对应边成比例的定理测出金字塔的高度,这是西方测量术的滥觞,说明数学是实用技术之母。

塔利斯的划时代贡献是开始了命题的证明。命题的证明,就是借助一些公理或真实性已经确定的定理来论证命题真实性的思维过程。它的作用:一是保证命题的正确性,使命题上升为定理,使人深信不疑;二是揭露各定理之间的内在联系,使数学结构构成一个严密的体系。

毕达哥拉斯

希腊的另一位数学家毕达哥拉斯(Pythagoras,约 580 - 568B.C. 生,501 - 500B.C. 卒)十分重视数学,企图用数学解释一切。他发现勾股定理时,欢欣欲狂,宰了一百头牲畜来祭奠女神的默示。勾股定理早为巴比伦人所知,最早的证明则归功于毕达哥拉斯。现在所采用的面积证法,则是欧几里得首先给出的。

毕达哥拉斯还将算术与几何联系起来,用整数 $2n+1, 2n^2+2n$ 表两个直角边,则斜边是 $2n^2+2n+1$,称毕达哥拉斯数。当 $n=1$ 时就是我国古代的勾三股四弦五,即勾股定理,其实只有 $n=1,2,3,4,5,6$ 时以及各数组的整数倍才是正确的:

n	1	2	3	4	5	6
$2n+1$	3	5	7	9	11	13
$2n^2+2n$	4	12	24	40	60	84
$2n^2+2n+1$	5	13	25	41	61	85

$n=7$ 时，$15^2+112^2 \neq 113^2 (2n^2+2n+1)^2$，且

$$(2n+1)^2+(2n^2+2n)^2 \neq (2n^2+2n+1)^2$$

以后希腊丢番图（Diophantvs，246－330）提出毕达哥纳斯方程

$$x^2+y^2=z^2$$

的一切正整数解，可用公式：

$$x=2ab, \quad y=a^2-b^2, \quad z=a^2+b^2$$

表示，这里 a，b 表示一奇一偶，为互质的正整数，且 $a>b$。

根据这个定理可以算出 100 以内的勾股数：

a	2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9
b	1	2	1	3	2	4	1	5	2	4	6	1	3	5	2	4
$x=2ab$	4	12	8	24	20	40	12	60	28	56	84	16	48	80	36	72
$y=a^2-b^2$	3	5	15	7	21	9	35	11	45	33	13	63	55	39	77	65
$z=a^2+b^2$	5	13	17	25	29	41	37	61	53	65	85	65	73	89	85	97

既然三元二次不定方程

$$x^2+y^2=z^2$$

有整数解，是否

$$x^3+y^3=z^3, \quad x^4+y^4=z^4, \quad \cdots, \quad x^n+y^n=z^n$$

也有整数解呢？这就导致以后的费马猜想。

毕氏学派又将自然数分为若干类：奇数、偶数；奇数乘奇数、偶数乘偶数；素数；完全数；三角数；平方数；五角数等。这些都属数论的范畴，因涉及毕氏学派的贡献，略加解释以明梗概。

素数

又称质数，是只能被 1 和自身整除的整数。素数有多少个？如何得到？有无表示素数的公式？几千年来吸引着很多数学家。经研究知道 100 以内的素数有 25 个：

2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，53，59，61，67，71，73，79，83，89，97。

古希腊爱拉托斯散（276～195B.C.）设计了一种寻找素数的“筛法”：先写出从 1 到 N 的连续整数，最先划去 1；保留 2，划去所有 2 的倍数；保留 3，划去所有 3 的倍数；保留 5，划去所有 5 的倍数；保留 7，划去所有 7 的倍数；等等，余下的数都是素数，史称爱拉托斯散筛法。

根据这个筛法，得到一个素数表，可以查出素数的分布情况：

区间	(1,100)	(1,1000)	(1000,2000)	(2000,3000)	(3000,4000)	(4000,5000)	(5000,10000)
素数个数	25	168	135	127	120	119	560

可见素数的分布，越大越稀，于是又出现新的问题：素数的个数是有限还是无限呢？

欧几里得证明了素数的个数是无限的，证法如下：假设素数

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \cdots, P$$

的个数有限，有一个最大的素数 P。再构成一数

$$S=(2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot P)+1,$$

显然，$S>P$，且 S 除以任何素数的余数都是 1，即 S 不能被任何素数

$$2, 3, 5, 7, 11, \cdots, P$$

整除，因 P 是最大的素数，而 $S>P$，则 S 必为合数，它必须被大于 P 的素数整除，这与 P 是最大的素数矛盾。因此素数的个数是无限的。

素数有无表达式成为新的研究对象。

有人考查 $4n+1$，$4n+3$，$6n+1$，…是否为素数？

n	1	2	3	4	5	6	7
$4n+1$	5		13	17			29
$4n+3$	7	11		19	23	27	31
$6n+1$	7	13	19		31	37	43

空格处是合数。结果都失败了。

梅森（Mersenne，1588－1648）曾研究形如 2^P-1 的数：

2^P-1	3	7	31	127	8191	
P	2	3	5	7	13	

他验证了当 $P=2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 127$ 时 2^P-1 都是素数，称 3，7，31，127……为梅森素数（M）。到 1983 年知道的梅森素数有 28 个。

费马（Fermal，1601～1665）研究形如

$$F_n=2^{2^n}+1$$

的数（以后称费马数）

F_n	3	5	17	257	65537	
n	0	1	2	3	4	

$n=0, 1, 2, 3, 4$ 时 F_n 都是素数。欧拉（Euler，1734～1800）证明当 $n=5$ 时

$$F_5=2494967297=641\times 6700417$$

不是素数。

素数究竟有无公式表达，至今仍无结论。

素数的研究是代数数论的一部分，我国秦九韶（1202～1261）最早创数论等余理论（1247）。西欧开始于高斯（Gauss，1777～1855）的研究（1801），以后经狄利克雷（Dirichlet，1805～1859）、克罗内克（Kronecker，1823～1891）、希尔伯特（Hilbert，1862～1943）、维诺格拉多夫（1891～　　）、华罗庚（1910～1985）、王元（1930～　　）、陈景润（1933～1996）等而发扬光大，成为纯粹数学研究的热门话题，谁都想夺取这顶数学皇冠上的明珠。

完全数

完全数是与除它自身以外的它所有正因子之和（将1计算在内）相等的正整数。

第一个完全数是6，

$$6=1+2+3;$$

第二个完全数是28，

$$28=1+2+4+7+14;$$

第三个完全数是496，

$$496=1+2+4+8+16+31+62+124+248\quad;$$

再下一个就很困难了。其实第三个就不容易，完全数首先要排除质数（因为质数的因子除自身外就是1），在合数里逐一寻找。这种方法很笨也很繁，要另辟思路，还是从6和28这两个已知的完全数中寻求线索：

$$6=2\cdot 3,\ 28=2^2\cdot 7,$$

也许灵机一动，把它与2发生联系：

$$6=2\cdot 3=2\ (2^2-1)\tag{1}$$

$$28=2^2\cdot 7=2^2\ (2^3-1)\tag{2}$$

再看496

$$496=2^4\cdot 31=2^4\ (2^5-1)\quad 。\tag{3}$$

现在有一线曙光了，这就导致如下的猜想：设

$$Q=2^{P-1}\ (2^P-1)\quad ,$$

前面提过梅森素数，如果 2^P-1 是梅森素数，则 Q 可能就是完全数。

因为梅森素数

$$M=2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 31,\ \cdots\ ,$$

（1）式对应 $P=2$，（2）式对应 $P=3$，（3）式对应 $P=5$，下一个完全数对应于 $P=7$，则第四个完全数是

$$2^6\ (2^7-1)\ =64\times127=8128\ 。$$

现在来验算它是正确的：

$$1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1016+2032+4064=8128\ 。$$

第五个完全数是

$$2^{30}\ (2^{31}-1)\ =33550326\ ,$$

是 1456 年在不知名的一份手稿中发现的。现在知道的完全数有 20 个，它们都是偶数，是否存在奇完全数，尚属悬案。

柏拉图学派

现在回头来看希腊另一位将几何奠基在逻辑基础上的柏拉图（Pluto，430～349B.C.），传说在他的学园门口写着："不懂几何者不得入"。他认为毕达哥拉斯关于点的定义（点是有位置的单位）不够明确，改为"点是直线的开端"，这与墨子"尺之端也"何其相似。

柏拉图坚持准确的定义、清楚的假设、逻辑的证明，在他的倡导下几何纳入了严谨的逻辑范畴，也出现了不少的数学家。他的学生攸多克萨斯（Eudoxus，408～355B.C.）创立了比例论，《几何原本》第五卷大部分是攸氏的作品。他用公理法建立理论，没有区别可通约和不可通约的必要，排除了毕达哥拉斯只能适用于可通约量的算术方法。

攸多克萨斯证明了"取去一量之半，再取去所余之半，这样继续下去，可使所余的量小于另一任何的小量"，就是庄子"一尺之捶，日取其半，永世不竭"的理论，即近代极限论的前驱。

攸多克萨斯用归谬法证明了圆锥、棱锥的体积是等底等高的圆柱、棱柱体积的 1/3，他所用的证法就是现在的穷举法。

门内马斯（Menæhmus，375～325B.C.）是攸多克萨斯的学生，是系统研究圆锥曲线的创始人。过去希波克拉提斯（Hippocrates，约 460B.C.）把二倍立方问题归结为在线段 a 与 $2a$ 之间插入两个等比中项 x，y 的问题，即

$$a:x=x:y=y:2a,$$

即 $$x^2=ay,\quad y^2=2ax,$$

即 $$x^4=a^2y^2=2a^3x,\quad 或\quad x^3=2a^3$$

门内马斯知道这个问题与

$$x^2=ay\quad 与\quad 2a^2=xy$$

相当，由此导致圆锥曲线的探讨。这时已把几何同代数方程联系起来了。

门内马斯用平面去截三种直圆锥，令平面与母线垂直。如圆锥的顶角（母线所张的最大角度）是直角，截口是抛物线；如果顶角是锐角，截口是椭圆；如果顶角是钝角，截口是双曲线。

亚里士多德（Aristotle，384～322B.C.）希腊的著名学者，也是柏拉图的学

生，是形式逻辑的奠基人，他定义的“点、线、面各是线、面、体的分界”。

欧几里得

集希腊几何之大成者是大数学家欧几里得（Enclid，330～275B.C.），据说托勒密（Ptolemy，367～285B.C.）国王问欧几里得，除《几何原本》外有没有其他的捷径？欧几里得答：“几何无王者之道”。有一个青年问欧几里得：学了几何之后将得到些什么？欧几里得说：“给他三个钱币，因为他想在学习中获取实利。”

《几何原本》是用公理法建立起演绎的数学体系的最早典范，集古希腊几何学之大成，内容是：

第一卷立“界说”（定义）36个，“公论”（公理）19则，其中第11论，有版本称第五公设，即“如果一直线和两直线相交，所构成的两个同侧内角之和小于两直角，那么，把这两直线延长，它们一定在那两内角的一侧相交”，这个命题不如其他公理那么显然，以后有人想证明它，打了二千多年笔墨官司，最后引出了非欧几何。

第二卷论面积的交换，用几何语言叙述代数的恒等式，如

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \quad 。$$

a^2 理解为以 a 为边的正方形面积等等，第11命题是有名的“黄金分割”。

第三卷讨论圆、弦、切线以及与圆有关的图形。

第四卷讨论多边形与圆，正多边形的作法，包括正五边形、六边形、十边形等。

第五卷比例论。

第六卷将比例论用于相似形的研究。

第七卷算术（含数论）。

第八卷连比例。

第九卷数论。第20命题：欧几里得定理：素数的个数无穷多。

第十卷主要讲不可通约量的理论。

第十一卷立体几何。

第十二卷利用穷竭法证明圆面积的比等于半径平方的比，球体积的比等于半径立方的比，及任何棱锥体俱为同底等高平行棱体（棱柱体）的三分之一等。

第十三卷讨论正多面体。

第十四卷、十五卷是后人补的，十四卷为亚历山大的依鲁西克（Hypsicles，约180B.C.），十五卷为6世纪初叙利亚人大马萨斯（Dumascius）。

阿基米德

阿基米德（Archimedes，287～212B.C.）与欧几里得、阿波罗尼斯（Apollonius，260～170B.C.）合称为亚历山大前期的三大家，普利尼（Pliny，23～79）称阿基米德为“数学的神”，《马塞拉斯传》记载，阿基米德说任何重物都可以移

动。“如果有另一个地球作为立足点，我就可以移动这个地球。”他发现了流体静力学的基本原理——“物体在液体中减轻的重量等于排开液体的重量”，被称为阿基米德原理。

阿基米德利用外切与内接 96 边形求得圆周率 π：

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}\text{ 。}$$

他研究了著名的阿基米德螺线 $\rho=a\theta$，发现 13 种正多面体，创三分角法与三分角器械。

他首次处理高阶等差级数求得

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n\ (n+1)\ (2n+1)\text{ 。}$$

用圆锥曲线方法解决了三次方程：

$$x^3\mp ax^2\pm b^2c=0\text{ 。}$$

他是一个热爱祖国的科学家，在第二次布匿克战争中用科学技术烧毁敌船，重创敌人，后人在他的墓碑上刻着球外切圆柱的图形来纪念这位爱国的数学家。

2.3 代数

代数的英文是 Algebra，清道光 25 年（1845 年）俄国赠我国图书中有《阿喀勒布拉数书》即它的译音。1873 年我国华蘅芳与英人傅兰雅合译英华里司《代数术》，初次使用代数这个名称，其中载有“代数之法，无论何数，皆可以任何记号代之”。说明最初的代数就是用符号来代替数字的一种方法。

代数是算术的进一步发展，启蒙时的特征是使用符号布列方程。使用符号是数学史上的一件大事。

3600 年前阿默士写下一串符号表叙方程

$$x\ \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+1\right)\ =37$$

1545 年卡当在《大术》中还用“*1 quad.quad.*$\tilde{P}$.32.*quad.*$\tilde{P}$.256.*æqualia* 48.*pos.*$\tilde{P}$.240”表示：

$$1x^4+32x^2+256=48x+240\text{ 。}$$

到 1637 年笛卡尔的《几何学》才用

$$x^3-9xx+26x-24\propto 0$$

表示

$$x^3-9x^2+26x-24=0\text{ 。}$$

从阿默士到笛卡尔，经三千年的变化，才形成现代的符号。

丢番图

古希腊丢番图（Diophantus，约 246～330）被誉为代数学的鼻祖。4 世纪时希腊诗文选集有一首短诗叙述了他的生平："丢番图的一生，幼年占$\frac{1}{6}$，青少年占$\frac{1}{12}$，又过了$\frac{1}{7}$才结婚，5 年后生子，子先父 4 年而卒，寿为其父之半。"列出方程：

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x\quad,$$

解出 $x=84$ 岁。

丢番图的《算术》讲述数的理论，大部分内容属代数范畴。解二次方程时只取一个正根，还有特殊的三次方程，在处理

$$Ax^2+C=y^2,\qquad Bx+C=y^2$$

等类型的不定方程时都用特殊的方法，很少给出一般的法则。

婆罗摩及多

7 世纪印度婆罗摩及多（Brahmagupta 598～660）的《算术讲义》和《不定方程讲义》对代数学有所进展，将代数用于天文学，给出负数的运算法则，得到二次方程 $x^2+px-q=0$ 的一个根：

$$x=\frac{\sqrt{p^2+4q}-p}{2}$$

对不定方程 $ax\pm by=c$ 他给出了通解的一般形式。

摩珂毗罗（Mahavira，约 850 年）也是印度数学家，著有《计算精华》。曾见到中国的《九章算术》，使用了其中的弓形面积公式：

$$S=\frac{1}{2}(b+h)h\quad。$$

印度的婆什迦罗（Bhaskera，1114－1185）还解过无理方程：

$$\sqrt{\frac{x}{2}}+2=\frac{x}{9}\qquad(x=72)\quad。$$

斐波那契

意大利人斐波那契（Fibonacci，1170～1250）著《算盘书》介绍印度一阿拉伯数码。1228 年修订本中载有"由一对兔子开始，一年后可繁殖多少对兔子"的有趣问题。导致著名的斐波那契数列

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \cdots$$

满足

$$a_{n+1}=a_{n-1}+a_n\qquad(n\geqslant 2)\quad。$$

他的观测实验是这样的。

假定雌雄各一的一对成熟兔子每月产一对小兔，新生的小兔在 2 个月后成

熟，并可再产一对小兔，下面考虑它们的繁殖情况。

设开始一对成兔为 A，它生小兔为 A_1，A_2，…，A_i，成熟后生的小兔为 A_{i1}，A_{i2}，…，A_{ij}，它们成熟生的小兔为 A_{ij1}，A_{ij2}，…，列表计算如下：

月	成　　兔		新　　　兔		总数	$\frac{a_{n+1}}{a_n}=b_n$
1	A	1	A_1	1	2	2
2	A	1	A_1 A_2	2	3	1.5
3	A A_1	2	A_2 A_3 A_{11}	3	5	1.66
4	A A_1 A_2	2	A_3 A_4 A_{11} A_{12} A_{21}	5	8	1.6
5	A A_1 A_2 A_3 A_{11}	5	A_4 A_5 A_{12} A_{21} A_{13} A_{22} A_{31} A_{111}	8	13	1.625
6	A A_1 A_2 A_3 A_4 A_{11} A_{12} A_{21}	8	A_5 A_6 A_{12} A_{13} A_{14} A_{21} A_{22} A_{23} A_{31} A_{32} A_{41} A_{111} A_{112}	13	21	1.615
7		13		21	34	1.619
8		21		34	55	1.617
9		34		55	89	1.618
10		55		89	144	1.618

这样得到斐波那契数列

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ \cdots,$$

它符合递推公式

$$a_{n+1}=a_{n-1}+a_n \quad (n\geqslant 2)\ 。$$

这个数列显然是发散的。

现在要研究兔子的繁殖率

$$b_n=a_{n+1}/a_n\ 。$$

从上表的最后一列发现数列 $\{b_n\}$ 可能趋于1.6附近的某一实数 b，假定

$$\lim_{n\to\infty} b_n=b\ ,$$

则

$$b_n-b=c_n$$

将趋于0，因

$$a_{n+1}=a_{n-1}+a_n,$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{n-1}}{a_n}+1,$$

即

$$b_n=\frac{1}{b_{n-1}}+1\ 。$$

而

$$b_n=b+c_n,\quad b_{n-1}=b+c_{n-1}\ ,$$

∴

$$b+c_n=\frac{1}{b+c_{n-1}}+1\ 。$$

当 $n\to\infty$ 时，$c_n\to 0$，$c_{n-1}\to 0$，于是得

$$b=\frac{1}{b}+1\ ,$$

即

$$b^2-b-1=0\ 。$$

因 $b>0$，求得：

$$b=\frac{1}{2}\ (1+\sqrt{5})\ =1.618034\cdots\ 。$$

这就是 $\{b_n\}$ 的极限，也就是兔子的繁殖率，也是后世“0.618 法”的先驱。

虚数

虚数最初是在解二次方程时出现的。1884 年法国人舒开（Nicolus Chuquet）解二次方程

$$x^2+4=3x\ ,$$

得根

$$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-4}\ 。$$

他声称这根是不可能的。

1545 年米兰学者卡当（Girolamo Cardano，1501 ~ 1576）认真地讨论了虚数。在他的《大术》中解“两数的和是 10，积是 40，求此二数”，用现在的符号可列方程：

$$x\ (10-x)\ =40\ ,$$

即

$$x^2-4x+40=0\ ,$$

$$x=5\pm\sqrt{15}\mathrm{i}\ 。$$

卡当将 $5+\sqrt{-15}$ 写成 5，$\overline{P}$，P_x，$\tilde{m}$，15。P_x 表根号，$\tilde{m}$ 是减（即负）。他称 $\sqrt{15}$ 为真实的根，而 $\sqrt{-15}$ 为虚构的根。他认为这种虚构的根有它的运算的合法性。可谓历史上首次承认虚数的存在。

1637 年，笛卡尔在《几何学》中首次给出虚数（imaginares）的名称，和实数（real）相对。

1777 年，欧拉（Euler，1707 ~ 1783）首次用 i 表示 $\sqrt{-1}$。1797 年米赛尔（Caspar Wessel，1745 ~ 1818）用 +1 表示正方向的单位，$+\varepsilon$ 表示另一种单位，方向与前者垂直且有相同的原点，并记：

$$\sqrt{-1}=\varepsilon\ 。$$

除虚数单位的符号不同之外，和现代复数平面（即高斯平面）的表示法一致。

1806 年阿工（Argand，1768 ~ 1822）用模表示向量 $a+\mathrm{i}b$ 的长度，1831 年高斯（Gauss，Carl Friedrich，1771 ~ 1855）用数偶（a，b）表示 $a+\mathrm{i}b$，于是复数的和与积都可用纯代数的方法来定义，而无需作几何解释。

1748 年欧拉提出著名的公式

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x,$$

若令 $x=\pi$，则有 $e^{i\pi}=-1$。

1702 年莱布尼兹（Leibniz，1646～1716）说："虚数是理想世界的奇异创造，几乎是介于存在与不存在之间。"

复数的几何解释使人们直观地理解其真实意义，也可看成平面向量。19 世纪中叶发展成一个数学分支复变函数论。

代数基本定理"n 次方程有 n 个根"，最早认识的是罗特（Rothe）（1608），达朗贝尔（D'Alembert，1717～1783）1746 年给出证明。高斯曾给出四个证明。第一次是他 20 岁的博士论文（1797），第四次是 1850 年。

方程的数值解法

在实用上往往只需求出实系数方程的实根近似值。日内瓦人斯图谟（Sturm，1803～1855）1829 年发表了"斯图谟定理"，给出了确定实根位置的方法，1835 年给出了证明。

1819 年英人霍纳（Horner，1786～1837）发表"用连续逼近法解所有阶的数字方程的新方法"，提出求实根近似值的"霍纳方法"。这个方法和我国秦九韶 1247 年的方法完全相同，将在下节阐明。

对数

西欧 15 世纪以来进入资本主义发展初期，随着商业发达，货币交换频繁，天文航海的复杂计算的需要，要求改进数学计算方法，在这种背景下出现了对数。

15 世纪数学家对等差数列与等比数列作对比研究：

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	…

要求第二行任意两数之积，如 8×32，只须计算与这两个数对应的第一行的数之和即可，即 3+5=8 所对应的 256。又如

$$16\times256\ (\text{查 } 4+8=12)\ =4096\ 。$$

将这种想法（求积改为求和）改写成

表（16×256）＝表（$2^4\times2^8$）＝表 2^{4+8}＝表 2^{12}＝12 表 2

再改写成：

$$\log_2(16\times256)=\log_2(2^4\times2^8)=\log_2 2^{12}=12\log_2 2=12。$$

这个方法就能满足求大数之积的需要，关键是要有一个表，它就是对数表。18 世纪大数学家拉普拉斯（Laplace，1749～1827）说："对数用缩短计算的时间来使天文家的寿命加倍。"

1484 年舒开已注意到这种关系，1544 年史提非（stifel，1487～1567）在《整

数算术》中把第一行数叫做指数，要计算两数之积，只需求这两数的指数的和即可。

对数的创始人是苏格兰的纳皮尔（Napier，1550~1617）发表《奇妙的定数定律说明书》（1614），纳皮尔当时造的对数表是给出微分方程：

$$x = \ln \frac{a}{y}$$

的近似积分，纳皮尔对数记为 Nap.log$y$，与自然对数（以 e 为底）的关系是

$$\text{Nap.log}y = 10^7 \ln \frac{10^7}{y}\ 。$$

对数表发表后英格兰数学家布里格斯（Briggs，1561~1631）建议改为以 10 为底的常用对数，1624 年发表《对数算术》，是以 10 为底的 14 位对数表。

17 世纪中叶，对数传入我国，在

$$\lg 2 = 0.30103$$

中 2 称真数，0.30103 称假数（以后改称 2 的对数），真数与假数对列成表，叫对数表。1648 年波兰人穆尼阁（1611~1656）来中国讲对数与三角学，与薛凤祚（？~1680）合编《比例对数表》，是我国最早的对数著作。

清代数学家戴煦（1805~1860）研究对数，发现捷法多种，著有《对数简法》（1845），《续对数简法》（1846），《假数测圆》（1852），总名《求表捷术》，1845 年英人艾约瑟（1825~1905）将戴煦的书译成英文寄回英国。

以上所论属于古典代数的范畴，是以讨论方程的解法为中心的。随着方程论的进展，数系逐步扩大，有了复数系，解方程问题基本上已经解决。关于方程的代数解法，留在第 5.6 节中讨论。

2.4 三角

早期的三角学是伴随天文学而产生的，原意是三角形的测量，也就是解三角形，后来成为研究三角函数及其应用的数学分支。

依巴谷与托勒密

最早的三角学奠基人希腊天文学家依巴谷（Hippurchus，180~125B.C.）为了天文观测的需要，作了一个和现在三角函数表相仿的“弦表”，即在圆心不同圆心角所对弦长的表。

几何中托勒密定理：“圆内接四边形两对角线所包的矩形等于两组对边所包矩形之和。”据说是出自依巴谷之手。托勒密（Ptolemy，85~165）继承依巴谷的成就，加以整理发挥，编成《天文集》，是古代天文学的总结。

托勒密将上面的几何定理特殊化，使圆的直径为 1，推出

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \quad,$$

$$\sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

等三角恒等式。书中包括从 0°到 90°每隔半度的弦表，相当于从 0°到 90°每隔 $(\frac{1}{4})°$的正弦函数表。

托勒密采用 60 进制把圆周分为 360°，把度分为 60 小分（原名第一小份，即后来的分），把分又分为 60 小分（原名第二小份，即后来的秒）。这就是"分""秒"名词的来源。1570 卡拉米（Caramuel）用"°、′、″"表示度、分、秒。

阿利耶毗陀

印度数学家阿利耶毗陀（Aryabhata，476～550）著《天文表集》、《算术》、《时间的度量》、《球》等。他指出圆周率

$$\pi = \frac{104 \times 8 + 62000}{20000} = 3.1416 \quad。$$

阿利耶毗陀比我国祖冲之晚生 47 年，比刘徽晚 200 多年，祖率

$$\pi \approx \frac{355}{113} \quad, \qquad \pi \approx \frac{3927}{1250}$$

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

3～5 世纪中印交通频繁，有无中国文化的影响也未可知。

三角学输入我国开始于明崇祯四年（1631），邓玉函与汤若望编《大测》，是我国第一部三角学，译 Sinus 为正弦，是我国正弦的由来。

π 鲁伯

帖木儿帝国（今乌兹别克）国王 π 鲁伯（1393～1449）是成吉思汗后裔，爱好天文，建立了当时世界上最大的天文台，聚集了一百多名学者，组织天文观测和数学用表的计算，他的正弦表精确到小数 9 位，编制的《π 鲁伯恒星表》牛津大学 1665 年就翻印了这本恒星表。

π 鲁伯天文台中主要领导人阿尔卡西 1427 年著《算术之钥》、《圆周论》，计算圆的 3×2^{28}边内接与外切多边形的圆长，得到

$$\pi = 3.\ 141,\ 592,\ 653,\ 589,\ 793,\ 25,$$

有 17 位准确数字，突破了祖冲之保持一千年的圆周率世界记录，一直到 1596 年才被柯伦（Ceulen，1540～1610）超过、阿伦的记录是小数后 20 位，到 1615 年再求到小数后 35 位。

近代由于天文、物理和数学的需要，用电子计算机算出 π 的值准确到小数点后 200 万位。

里赛奥蒙田纳斯

德国人里赛奥蒙田纳斯（Reqiomontanus，1436～1476）是欧洲著名三角学家，

著《论一般三角形》(1464)使三角学脱离天文学成为独立的学科，历来三角函数表采用半径的长度不一，托勒密取 $r=60$，印度人取 $r=3438$，里赛奥蒙田纳斯为了求得更精密的值取 $r=600000$，后来又造一更精密的正弦表，取 $r=10^7$。

《论一般三角形》除记述三角定律和三角函数表外，还讨论了有趣的极大极小问题："天花板挂一垂直的杆，长10尺，下端离地面4尺，求在地面上找一点(或这点的轨迹)使对杆所张角度最大。"

鄂图

欧洲当时制表全凭手算，计算浩繁。由于天文的需要，必须有更精密的三角函数表。天文学家哥白尼(Copernicus，1473~1543)的弟子，取 $r=10^{15}$ 来制正弦、正切、正割表，花了十多年的时间，到1596年才由德国人鄂图(Otto，1550~1605)完成。

鄂图是西方第一个得到祖冲之密率(简称祖率)

$$\pi=\frac{355}{113}$$

的人(1573)，比祖率晚了1100年。

鄂图的算法是

$$\frac{377-22}{120-7}=\frac{355}{113}\text{。}$$

德莫佛与欧拉

法国数学家德莫佛(Abraham de Moivre，1667~1754)给出了德莫佛定理：

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta$$

他认为这公式在 n 为正有理数时成立。

后来瑞士数学家欧拉(Euler，1707~1783)在1748、1749年证明 n 是实数时成立，并给出著名的欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x\quad,$$

$$\sin z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\quad;$$

$$\cos z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}\quad\text{。}$$

并导出展开式

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\quad,$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\quad\text{。}$$

它标志三角学从研究三角形解法转变为研究三角函数及其应用的一个分析学的分支。

欧拉引入了弧度制，将度量直线段和圆弧的单位统一起来，从而简化三角公式及其计算。

2.5 解析几何

恩格斯在《自然辩证法》中说："数学中的转折点是笛卡尔的变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学。"又说："在以牛顿和林耐为标志的这一时期末，我们见到这些科学部门已经在某种程度上完成了。最重要的数学方法基本上被确定了。主要是笛卡尔制定了解析几何，由纳皮尔制定了对数。"这里是说，笛卡尔的解析几何标志着数学的重大进展：从常量数学进入到变量数学。

笛卡尔

17世纪杰出的数学家、物理学家笛卡尔（Descartes，1596～1650）是一个充满革新精神的科学家。他曾说："我决心放弃那个仅仅是抽象的几何，这就是说，不再去考虑那些仅仅是用来练习思想的问题。我这样做，是为了研究另一种几何，即目的在于解释自然现象的几何。"他的中心思想是要建立起一种普遍的数学，使算术、代数和几何统一起来。他从天文、地理的经纬制度出发（坐标的概念），让平面上的点和实数对（x，y）对应，进一步考虑二元方程

$$F(x,y)=0$$

的性质。当 x 变化时 y 也跟着变化，x，y 不同的数值确定平面上许多不同的点，这些点构成了一条曲线。于是把几何图形用方程来表示。同样也可以离开几何图形，用代数方法研究曲线的性质，这就是笛卡尔解析几何的基本思想。

笛卡尔把过去对立的两个研究对象"形"和"数"统一起来，并在数学中引进"变量"，完成数学史上一项划时代的变革。

笛卡尔当时没有引入第二个坐标轴（y 轴），也没有横坐标的概念，坐标一词是莱布尼兹在1692年创用的。

费马

与笛卡尔同时代的法国业余数学家费马（Fermat，1601～1665）在笛卡尔《几何学》（1637）出版之前写过关于解析几何的文章，直到1679年才发表，文中有

$$y=mx,\qquad xy=k^2,$$
$$x^2+y^2=a^2,\qquad x^2\pm a^2y^2=b^2\quad,$$

被指明为直线和圆锥曲线（双曲线、圆、椭圆）。

费马在1638年发现求极大极小的方法，先使一代数方程的变数作微小的变动，然后使之消失。这就是现在微分学里求局部极值的方法，即解 $f'(x)=0$ 就

能得到极值点。他还用无穷小的思想到求积问题上去，这是微积分学的先声。

费马对笛卡尔的解析几何曾加非难，所争之处大多是笛卡尔立论晦涩之处，后来终于互相仰慕成为好友。

卡瓦列利

意大利数学家卡瓦列利（Cavalieri，1598～1647）也是解析几何与微积分学的先驱者，他最先使用极坐标求阿基米德螺线下的面积，著有锥线论（1632）、三角学（1632）、光学、天文学等书。

卡瓦列利 1629 年提出"不可分原理"，6 年后出版《连续不可分几何》。他的理论认为一条线由无穷多的点构成，一个面由无穷多条线构成，一个立体由无穷多个面构成；点的运动产生线，线的运动产生面，面的运动产生体，这一理论便是微积分的雏形。

本节所论是算术、几何、代数、三角与解析几何的起源，它们属于古典初等数学，都是常量数学。

3 中国古代数学

我国是世界文明古国，历史悠久，人民勤劳聪慧，为人类作出巨大的贡献。指南针、造纸术、印刷术、火药四大发明，举世闻名，而对我国古代数学的成就，则知之不多。实际上，14世纪以前我国数学有很大的发展，一直在世界的前列，曾创二十多项世界纪录。这段光荣的历史，应该大书特书，使青年了解祖国，以增强民族的自尊心和责任感。

3.1 中国古代数学的世界记录

3.1.1 十进制记数法

十进制记数法有两个重要概念：一是基数即以十为基数，二是位置制，即“逢十进一位”。我国从黄帝时期就开始使用十进制，商代（公元前16－公元前11世纪）的甲骨文是最好的证据，如：

甲骨文	一	二	三	☰	X	∧	十	)(	ㄨ	|	U	Ш	[illegible]	[illegible]	[illegible]	千	六
今　文	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60	70	80

甲骨文	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
今　文	90	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	2000	1万	2万	“4567”

世界上使用十进制的国家还有埃及，但埃及没有位置值的概念，罗马记数法在欧洲流行了一千年，也有同样书写不便的缺陷，印度采用十进制比我国晚一千多年。

我国在三四千年前在记数法上的成就，使法国数学家拉普拉斯（Laplace，1749－1827）感到惊叹，他说：“用很少几个符号来表示一切数目，使符号除具有形状的意义外，还具有数位的意义，这一思想是如此自然，如此使人容易了解，简直无法估计它的奇妙程度。拿阿基米得和阿波罗尼（Apollonius，260－170B.C.）两人来说，他们是希腊学术界最伟大的天才，连他们也没有想出这种记数法，可见达到这一成就是多么不容易啊！”这个评价，对于古人，当之无愧，对于今人，激动不已！

我国的珠算，最能体现十进制的优越性，也是一种创造发明。最早见于东汉徐岳的《数术记遗》(190 年)。据北周甄鸾（约 535 ~ 566）的注解“每组有五颗上下移动的算珠，上面还有两颗，每颗相当于五个单位”。这是世界上关于珠算的最早记载。

我国古代的十进制也有缺陷，没有 0 这个数码，遇到 0 则空一位（算盘就是这样），有时在空位上画一个□，或画一个○，印度是最早使用 0 作数码的国家，传入阿拉伯后，习惯上称阿拉伯数字。

3.1.2 八卦与二进制

相传周文王（1182 ~ 1135B.C.）著《周易》，其中载有“易有太极，是生两仪，两仪生四象，四象生八卦”。

两仪：　阳爻⚊　　阴爻⚋

四象：　太阳⚌　　少阳⚎

　　　　少阴⚍　　太阴⚏

八卦：　乾☰　坤☷　震☳　艮☶

　　　　离☲　坎☵　兑☱　巽☴

对于八卦，为便于记忆其形状，编有八句象形的歌诀：“乾三连，坤六段，震仰盂，艮覆碗，离中虚，坎中满，兑上缺，巽下断”。

八卦常用来代表八种不同的事物，如东、东南、南、西南、西、西北、北、东北等八个方位，或天、地、风、雷、水、火、山、泽等八种自然现象。

八卦两两相重得 64 卦（六爻卦）：

乾䷀、坤䷁、屯䷂、蒙䷃、……

如果把阳爻（－）对应 1，阴爻（－－）对应 0，则可视八卦为二进制上的一、二、三位数：

卦名	坤	震	坎	兑	艮	离	巽	乾
符号	☷	☳	☵	☱	☶	☲	☴	☰
二进制数	000	001	010	011	100	101	110	111
十进制数	0	1	2	3	4	5	6	7

周易八卦这种符号体系，隐含着世界上最早的二进制思想和表达形式。

西欧认为二进制的发明者是莱布尼兹（1646 ~ 1716)。莱布尼兹看到《周易》

中的八卦后评论说：“易图是流传于宇宙间科学中最古的纪念物，伏羲① 是世界知名的学者，是中华帝国和东洋科学的创造者。”1671 年莱布尼兹把他研制的计算器（能作加法与乘法）送给清朝康熙皇帝（1654～1722），并建议在北京设立科学院。

八卦还有另一种数学意义，如果把阳爻定为正（+），阴爻定为负（-），则八卦又可写成：

(+ + +)，(- + +)，(- - +)，(+ - +)，

(+ + -)，(- + -)，(- - -)，(+ - -)

正好表示三维笛卡尔坐标系的八个卦限，卦就是“八卦”之卦，象限就是“四象”之象。

近代科学家李政道于 1979 年说：“易经是中国古代重要的科学著作，八卦实际上是今日数学上的八阶矩阵，电子计算机的二进制也可溯源于八卦。”

3.1.3 纵横图

纵横图也称幻方图。传说夏禹（2300B.C.）治水时，从黄河中跃出一头龙马，驮着一张“河图”（图 1 左），从洛河里浮出一只大龟，背着一幅“洛书”（图 1 右）献给夏禹治理天下。

将河图、洛书中的点用数字表示，就可得下面的数表，即九宫图。

		7		
		2		
8	3	5	4	9
		1		
		6		

河 图

4	9	2
3	5	7
8	1	6

洛 书

南宋杨辉（13 世纪）称洛书中九宫图为纵横图。取纵和与横和相等之意：

$$4+3+8=9+5+1=2+7+6=15$$

$$4+9+2=3+5+7=8+1+6=15$$

杨辉想出一个换位法构造九宫图：

如图 2（a）在空方格中顺次写下 1，2，…，9，按虚线画上一个九宫格；

在图 2（b）中将实线与虚线换位，在实九宫格里有五个数字定了位，出现

① 相传“伏羲制卦，文王系辞”，伏羲是传说中三皇五帝之一。

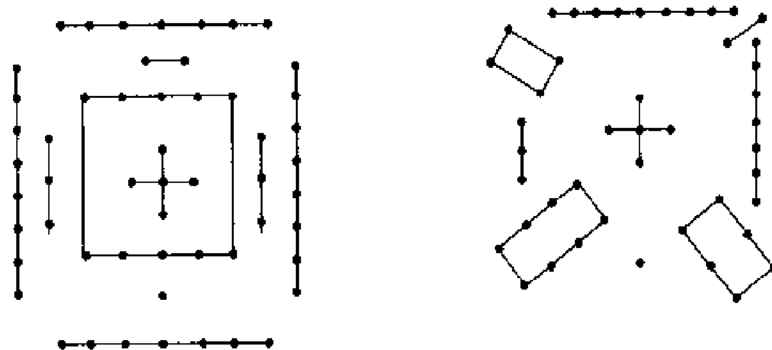


图1

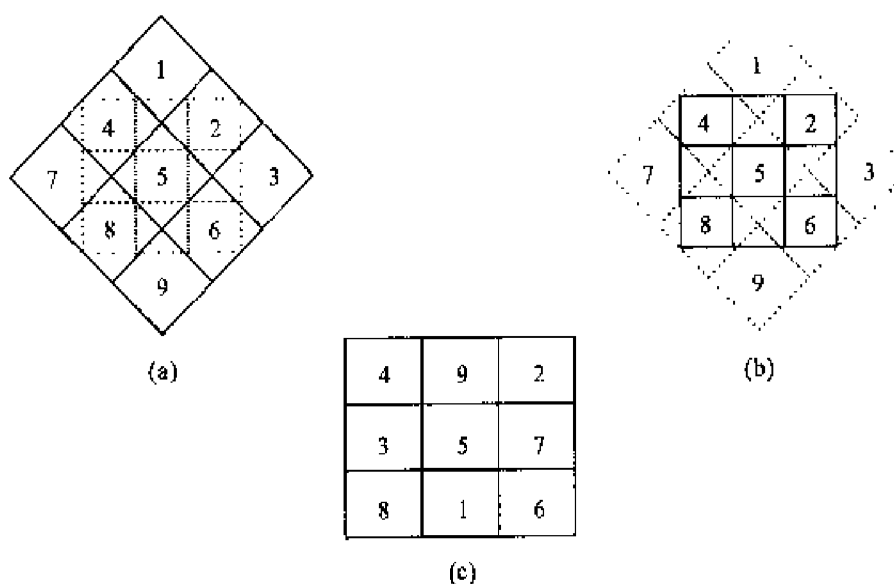


图 2

了四个空格；

将用2（b）的虚线去掉，将1和9换位，3和7换位，写进四个空格，就得到九宫图（图2（c））。

杨辉在他著的《续古摘奇算法》（1275）中还编制了四至十阶纵横图，可称奇算。

1	14	4	15
12	7	9	6
13	2	16	3
8	11	5	10

4阶， $S_4=34$

16	14	8	2	25
3	22	20	14	9
15	6	4	23	17
24	18	12	10	1
7	5	21	19	13

5阶， $S_5=65$

27	29	2	4	13	36
9	11	20	22	31	18
32	25	7	3	21	23
14	16	34	30	12	5
28	6	15	17	26	19
1	24	33	35	8	10

6阶， $S_6=111$

46	8	16	20	29	7	49
3	40	35	36	18	41	2
44	12	33	23	19	38	6
28	26	11	25	39	24	22
5	37	31	27	17	13	45
48	9	15	14	32	10	47
1	43	34	30	21	42	4

7阶， $S_7=175$

61	4	3	62	2	63	64	1
52	13	14	51	15	50	49	16
45	20	19	46	18	47	48	17
36	29	30	35	31	34	33	32
5	60	59	6	58	7	8	57
12	53	54	11	55	10	9	56
21	44	43	22	42	23	24	41
28	37	38	27	39	26	25	40

8阶， $S_8=260$

31	76	13	36	81	18	29	74	11
22	40	58	27	45	63	20	38	56
67	4	49	72	9	54	65	2	47
30	75	12	32	77	14	34	79	16
21	39	57	23	41	59	25	43	61
66	33	48	68	5	50	70	7	52
35	80	17	28	73	10	33	78	15
26	44	62	19	37	55	24	42	60
71	8	53	64	1	46	69	6	51

9阶， $S_9=369$

60	5	96	70	82	19	30	97	4	42
66	43	1	74	11	90	54	89	69	8
46	18	56	29	87	68	21	34	62	84
32	25	100	47	63	14	53	27	77	17
22	61	38	39	52	51	57	15	91	79
31	95	13	64	50	49	67	86	10	40
83	35	44	45	2	36	71	24	72	93
16	99	59	23	33	85	9	28	55	98
73	26	6	94	88	12	65	80	58	3
76	48	92	20	37	81	78	25	7	41

10阶， $S_{10}=505$

以10阶为例，将自然数1，2，3，…，100放入10×10的方格内，每格

数，使

$$纵和 = 横和 = S_{10} = 505，$$

这个难度很大，结果惊人。杨辉从九宫图想出一个换位法，可以想见百宫图也是有术的，只是没有笔之于书，留给后人。这里不难想到前人艰苦卓绝的思维方法。更想到数学思维的奥妙，应该是有术可窥的。

杨辉称九阶纵横图为九九图，十阶为百子图。纵横图的排法也不是惟一的，如百子图的另一种排法：

1	20	21	40	41	60	61	80	81	100
99	82	79	62	59	42	39	22	19	2
3	18	23	38	43	58	63	78	83	98
97	84	77	64	57	44	37	24	17	4
5	16	25	36	45	56	65	76	85	96
95	86	75	66	55	46	35	26	15	6
14	7	34	27	54	47	74	67	94	87
88	93	68	73	48	53	28	33	8	13
12	9	32	29	52	49	72	69	92	89
91	90	71	70	51	50	31	30	11	10

书中还有如下排法，只知纵和 = 横和 = 147，斜和不等（图 3）。

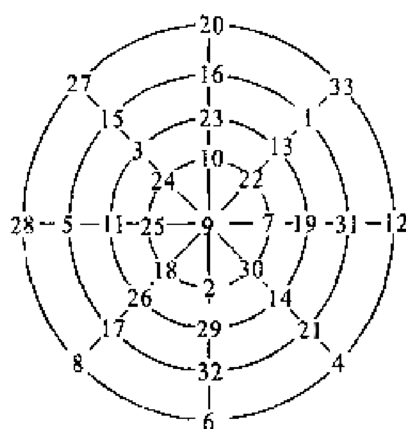


图 3

比杨辉纵横图晚二百多年，欧洲中世纪出现了幻方图。下面是度勒（1471～1528）的版画“忧郁症”中的 4×4 幻方：

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

被用来作护身符，其中最下一行有 1514，就是版画制作的年代。

这种排法是否惟一，曾有人以赏金求解。又有人提出 $n \times n$ 幻方是否存在。2×2 幻方显然不存在。现在的世界记录是 105 阶纵横图，是美国 13 岁的孙达完成的。

关于纵横图（幻方）的研究属于组合数学一门新的分支，最初以为只是一种“思维体操”，现在电脑出现后，它在程序设计、实验设计和图论等方面，有着广泛的应用。

3.1.4 勾股定理

我国《周髀算经》（约 235 ~ 157B.C.）载有“昔者周公（约 1100B.C.）问于商高曰：“数从安出？商高曰：数之法，出于圆方：圆出于方，方出于矩，矩出于九九八十一。故折矩，以为勾广三，股修四，经隅五，……此数之所生也。”

这段话是说，数是根据圆和方的道理得来的。圆从方来，方又以矩来，矩是根据乘除法计算出来的。作一个直角三角形，如果短直角边是 3，长直角边是 4，那么斜边就是 5。距今三千年前就知道用 3:4:5 的办法来构成直角三角形，亦云奇矣！

《周髀》还载有：“昔者荣方问于陈子[①]，……陈子曰：日中立竿测影，周髀长八尺，夏至之日，晷[②] 一尺六寸，髀者，股也。正晷者，勾也。……若求邪至日[③]，以日下为勾，日高为股，勾股各自乘，并而开方除之，待邪至日。”陈子用了勾股弦公式：

$$弦 = \sqrt{勾^2 + 股^2}\ ,$$

即

$$勾^2 + 股^2 = 弦^2\ 。$$

在计算中有

$$\sqrt{238000^2 - 206000^2} = 119197^+\ ,$$

已运用了普遍的勾股定理。比“勾三股四弦五”更进了一步，因而后来把勾股定

① 赵爽（约 222 年）注：荣方陈子乃周公后人。
② 晷，音轨，日影。
③ 髀到太阳的距离，邪同斜。

理称为陈子定理。

古希腊数学家毕达哥拉斯（550B.C.）证明了这个定理，我国三国时吴人赵爽在他的著作《勾股圆方图》中用弦图的证明（如图4），比印度婆什迦罗的图（没有弦图外面的正方形）要早九百年，证法简单别致，富有创见。用现在的写法是

$$2ab+(b-a)^2=c^2\ ,$$

即 $$a^2+b^2=c^2\ 。$$

中国最古的几何应该是《墨经》，已在§2.2中介绍了。

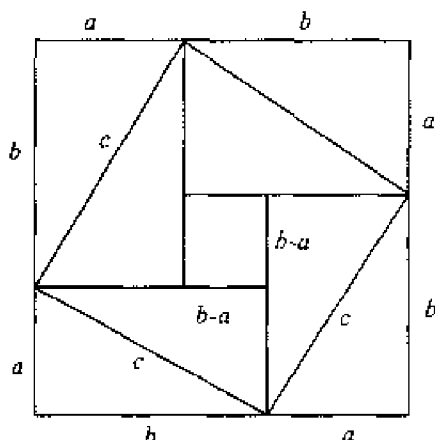


图4

3.1.5 最早的分数小数运算

我国春秋（770～476B.C.）时的著作《左传》载有："大都不过三国之一，中五之一，小九之一。"这是说诸侯的都城最大不得超过周文王国都的三分之一，中等不得超过五分之一，小的不超过九分之一。这是世界上最早的分数概念。

秦始皇（246～209B.C.）时《颛顼历》规定

$$1\text{年}=365\frac{1}{4}\text{日}=12\frac{7}{19}\text{月}\ 。$$

《周髀算经》中载

$$1\text{月}=29\frac{499}{940}\text{日},\quad 1\text{年}=12\text{月}=354\frac{348}{940}\text{日}\ 。$$

都证明我国在2500年前已经掌握了分数的概念。《九章算术》（300B.C.）方田章给出了完整的分数运算法则：约分、合分（加法）、减分、乘分、经分（除法）、课分（比较分数大小）、平分（求诸分数的平均数），如其中第七题：

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{1\times5+2\times3}{3\times5}=\frac{11}{15}\ ;$$

第十题：

$$\frac{8}{9}-\frac{1}{5}=\frac{8\times5-1\times9}{9\times5}=\frac{31}{45}\ ;$$

第十八题：

$$\left(6\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)\div3\frac{1}{3}=\frac{85}{12}\div\frac{10}{3}=\frac{85}{12}\div\frac{40}{12}=\frac{85}{40}=2\frac{1}{8}\ 。$$

刘徽注《九章》时补充了分数除法的法则：

$$\frac{85}{12}\div\frac{10}{3}=\frac{85}{12}\times\frac{3}{10}=\frac{85}{40}=2\frac{1}{8}\ 。$$

这些记载说明我国公元前一世纪已掌握了完整的分数运算。

印度到7世纪才有分数的记载，欧洲到13世纪在斐波那契的书中叙述最小公倍数时提到分数，1522年后才有分数的运算。

我国将小数视为以10的乘幂作分母的分数，《九章》少广章（关于田亩的面积球体积的计算）“开方术”中说“微数无名者以为分子，其一退以十为母，其再退以百为母，退之弥下，其分弥细”。到1427年中亚阿尔卡西（Al-kashi）才提出十进小数的概念，1587年比利时斯提文（Stevin，约1548～1620）才陈述小数理论，比我国晚一千四百多年。

3.1.6 负数概念

《九章算术》在方程章里明确提出了负数的概念：“正负术曰：同名相除，异名相益，正无入负之，负无入正之；其异名相除，同名相益，正无入正之，负无入负之。”同名就是同号，异名就是异号，揭示了减法法则与加法法则。

《乾象历》（206年）载有：“强弱相并，同名相从，异名相消。其相减也，同名相消，异名相从。”与正负术完全一致。1261年杨辉《详解九章算法》中将益、从改为加，除、消改为减，更加明确了正负与加减的关系。

印度7世纪婆罗摩及多开始认识负数，欧洲到13世纪斐波那契才认识负数。德国史提非1553年还说负数是荒谬的。卡当解三次方程时认为负根是虚有的，仅仅是一个记号，数学家阿默尔（Amanld，1612～1694）怀疑

$$(-1):1=1:(-1)\quad,$$

他说：“一个较小数与较大数的比，怎么能等于较大数与较小数的比呢?”到1637年笛卡尔解析几何出现后才公认负数的地位。

一个新数的建立，并非易事，它代表一个时代的水平。我国在一世纪就对负数有正确的认识，并认为卖是正则买是负，余钱是正则不足钱是负，益是正则损为负，可见当时我国的数学水平。

3.1.7 今有术（比例）

《九章算术》粟米章有“今有术”，即由

$$a:b=c:x$$

求 x 的比率算法。原题是：“粟米之法，粟率五十，粝米三十，今有粟一斗欲求粝米，问得几何?”解法是“以所有数乘所求率为实（被除数），以所求率为法（除数），实如法而一（以法除实所得的商就是所求数）”，即

$$50:30=10:x,\ x=\frac{30\times10}{50}=6\text{（升）}\quad。$$

263年刘徽注《九章》时称“今有术”。1897年清代丁取忠校《白芙堂算学

丛书》时说："今有率、所求率者，举以为例之两数也，惟此两率者，为例已定，故今所设之数可比照以求，所以亦名比例术也。"

《九章算术》"衰分"章把今有术推广到配分比例，"均输"章除配分比例外，还有复比例。

7世纪印度婆罗摩及多著作中有"三章法"，又称三数法则，即已知三数求第四比例项，就是今有率，比我国至少晚六百年，欧洲的比例率是从印度输入的。

3.1.8 盈不足术（线性方程组）

《九章算术》"盈不足"章是世界上最早给出的线性方程组解法。书中第一题："今有共买物，人出八，盈三，人出七，不足四。问人数、物价各几何?"

用现在的解法，设 x 为人数，y 为物价，每人出 a_1 盈（或不足）b_1，每人出 a_2 盈（或不足）b_2，盈为正，不足为负，列出方程组

$$\begin{cases} a_1x - y = b_1 \\ a_2x - y = b_2 \end{cases},$$

解出

$$x = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}, \qquad y = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_1 - a_2};$$

$$\frac{y}{x} = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{b_1 - b_2}。$$

y/x 为平均每人应出钱数，这个公式和现在的加减消元法（或行列式解法）是一致的。

《九章算术》"方程"章第一题："今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。问上中下禾实一秉各几何？答曰：上禾一秉九斗四分斗之一；中禾一秉四斗四分斗之一；下禾一秉二斗四分斗之三。"

用现在的解法，设上中下禾每秉各 x、y、z 斗，得方程组：

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 26 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ 3x + 2y + z = 39 \end{cases}$$

"术曰：置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗于右方；中、左禾列如右方。以右行上禾遍乘中行而为直除。又乘其次，亦以直除。"

古代是用筹来运算的，未知数不用符号表示，但确定其位置，既是现在的分离系数法，又像矩阵。"术曰"一段，记为

上禾秉数

中禾秉数

下禾秉数

实斗数

用矩阵表示就是

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix}$$

转置，可写成上面三元一次方程组的矩阵形式，再用高斯－卡当消去法，即

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)\times 3} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 29 \\ 6 & 9 & 3 & 102 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-2\times(1)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)\times 3} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 3 & 6 & 9 & 78 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-(1)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 0 & 4 & 8 & 39 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{转置}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

使得“术曰”的结果：

左行　中行　右行

上禾　(x)

中禾　(y)

下禾　(z)

实　(常数)

中行、左行就是消去 x 后的方程组

$$\begin{cases} 4y + 8z = 39 \\ 5y + z = 24 \end{cases}$$

再消去一元，

左行	中行	右行	

上　禾　(x)

中　禾　(y)

下　禾　(z)

实　　（常数）

得

$$36z = 99,\quad z = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}\text{。}$$

然后可求出

$$x = 9\frac{1}{4},\quad y = 4\frac{1}{4}\text{。}$$

我国古代利用筹算解线性方程组，其思想实际上就类似于矩阵的初等变换，与高斯－卡当消去法是一致的。我国要领先世界1700多年。

我国的盈不足术约在9世纪传入中亚地区。阿尔花剌子模（Al-khowarizmi，约780－850）著《盈不足算书》（约830年），其原文音译为“契丹算法”。契丹是当时阿拉伯国家对北部中国的称谓。

3.1.9　增乘开方术

《九章算术》“少广”章把从田亩面积求边长，与从球体积求直径的算法称为增乘开方术。记载了世界上最早的开平方和开立方的法则。现在以$\sqrt{55225}$为例说明当时的法则，和现在的演算是一致的。

“少广”章开方术原文是：

1）置积为实，借一算

实	5	52	25

（从个位起两位一节）

2）步之，超一步，议所得。

议得	2		
实	5	52	25

$(2^2 = 4 < 5)$

3）以一乘所借一算为法，而以除。

议得	2		
实	1	52	25
法	2		

$(5 - 2^2 = 1)$

4）除已，倍法为定法，其复法，折法而下，复置借算步之如初。

议得	2		
实	1	52	25
定法	4		

$(2\times 2=4)$

5）以复议一乘之，所得副以加定法，以除。以所得副从定法，复除，折下如前。

议得	2	3
实	23	25
定法	4	6

$(15225-13900=2325)$

$(2\times 23=46)$

6）复置借算步之如初。以复议一乘之，所得副以加定法，以除。

议得	2	3	5
实			
定法	4	6	5

$(2\times 235+5=465)$

以上 6 步与现在开平方法完全一致：

```
                          2   3   5
                        √5  52  25
       2² = 4            4
   20 × 2 = 40           1  52
            3
           43            1  29
            3                23  25
  20 × 23 = 460
            5
          465                23  25
            5                     0
```

《九章算术》“少广”章“开立方术”也与现在的演算步骤一致。

古代巴比伦人借助于数表开平方、开立方，没有具体的方法。公元 4 世纪末亚历山大西翁注释托勒密（85～165）《天文集》给出了开平方的例子，比我国《九章》晚三百多年。印度阿利耶比伦（476～550）的开平方法也比《九章》晚四百多年。

3.1.10 重差术（测量术）

《周髀》荣方问于陈子（前 1100）有“窃闻夫子之道，知日之高大，……其信有之乎？陈子曰：日中立竿测影，……周髀长八尺，夏至之日，晷一尺六寸。髀者，股也。正晷者，勾也。正南千里，勾一尺五寸，正北千里，勾一尺

七寸。”史称陈子测日术为“重差术”，是世界上最古的测量记载。

这段话给出了测日公式。测日，今天来说是没有意义的，但在当时这种精神却是可贵的，不妨作为测高物的公式，那时赖以测高的理论是划时代的、创纪录的。

在图5中，因 $l_1 // l_2$ 根据相似三角形性质，有

$$x : h = d : a,$$

$$y : b = x : h = d : a$$

$$\therefore \quad x = \frac{dh}{a}, \qquad y = \frac{db}{a}。$$

式中 $d = 1000 + 1000 = 2000$，$h = 80$，$b = 15$，$a = 2$。

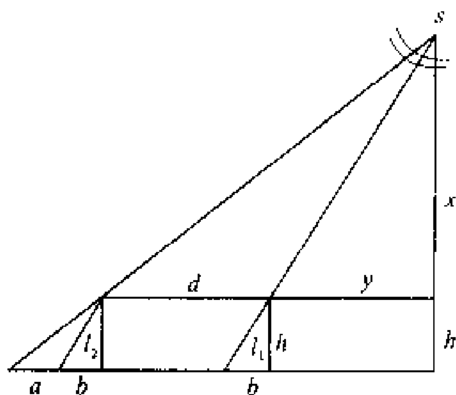


图 5

相距2000里，差 $a = 2$，相距1000里，$a = 1$。所以“法曰：周髀长八尺，勾之损益，寸千里。”

汉郑玄（127～200）注：“凡日影于地，千里而差一寸”。陈子另有一个更简便的方法，即影长 b 是6尺的时候，l_1、b、h 三边正好成3:4:5的关系，于是

$$y = \frac{d \cdot b}{a} = \frac{2000\text{（里）}\cdot 60\text{（寸）}}{2\text{（寸）}} = 60000\text{（里）}。$$

$$\therefore \quad x = 80000\text{（里）}。$$

他说：“候勾六尺，……从髀至日下六万里而髀无影，从此以上至日，则八万里。”

《周髀》还附有“日高图”，汉赵爽有“日高图注。”刘徽在《九章算术序》中把日高修正为

$$\text{日高} = \frac{d \cdot h}{a} + h = \frac{\text{表距} \times \text{表高}}{\text{影差}} + \text{表高}。$$

刘徽撰《海岛算经》时把“日高术”的理论应用到测量，也许他已想到测日高的意义是不大的。

关于测量之祖的问题，西方有一段记载：塔利斯在公元前六百年利用日影测金字塔高，使埃及王大为惊奇。而陈子的“重差术”比塔利斯要早五百年。

3.1.11 中国剩余定理

公元3世纪的《孙子算经》卷下26题：“今有物不知数，三三数之余二，五五数之余三，七七数之余二，问物几何？答曰：二十三。”

“术曰：三三数之余二，置一百四十；五五数之余三，置六十三；七七数之

余二，置三十；并之，得二百三十三，以二百一十减之，即得。凡三三数之余一，则置七十；五五数之余一，则置二十一，七七数之余一，则置十五，一百六以上，以一百五减之即得。”

《孙子》“物不知数”一题在我国数学界引起很大兴趣，宋朝周密《志雅堂杂钞》卷下称为鬼谷算、隔墙算，宋朝杨辉《续古摘奇算法》（1275）称其为秦王暗点兵、翦管术，明朝程大位《算法统宗》（1592）称为物不知总、韩信点兵。

宋朝秦九韶（1202～1261）在1247年推广了这个算法，认为70是5和7的最小公倍数35的2倍，21是3和7的最小公倍数的1倍，15是3和5的最小公倍数的1倍，秦九韶称这个倍数为“乘率”，在《数书九章》（1247）给出乘率的求法，并将3、5、7称为定母，70、21、15称为乘数，这类算法称为“大衍术一术”。

程大位在《算法统宗》中有孙子歌曰：

三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，
七子团圆正半月，除百零五便得知。

在此之前宋周密已有歌诀：

三十孩儿七十稀，五留廿一事尤奇，
七度上元重相会，寒食清明便可知。

上元隐含15，冬至后105日谓之寒食，冬至一般是12月22日，清明是4月5日，前后105天，这个问题就是现在数论同余式的理论。设x是所求的物数，要解同余式组

$$\begin{cases} x \equiv 2 & \pmod{3} \\ x \equiv 3 & \pmod{5} \\ x \equiv 2 & \pmod{7} \end{cases}$$

得
$$x \equiv 70 \times 2 + 21 \times 3 + 15 \times 2 = 233 \equiv 23 \pmod{105} \quad 。$$

一般解为
$$x = 23 + 105n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots) \quad ,$$

正整数解是23，128，233，338，… 。

《孙子》的答案23是最小正整数解。

英人伟烈亚力1852年在《华北先驱周报》上以《中国算术科学摘记》为题，介绍了大衍求一术。中国独特的算法开始为欧洲学者所了解。

1876后德国马提森（1830～1906）认为大衍求一术和高斯《算术探究》上的定理一致，而高斯的定理比秦九韶晚600年，比《孙子》就更晚了。现在一般数论书称大衍求一术为中国剩余定理。

3.1.12 贾宪、杨辉三角

现在二项展开式

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n$$

系数的排列是宋朝贾宪（1050 年）、杨辉（1261 年）最先给出的。贾宪用图 6 求出二项系数，并说明开方的法则，因而称为“开方作法本源”，图下是开方的术文。杨辉在图下举了两个例题，一是开立方，一是开四次方。

在 11 世纪就知道 $(a+b)^n$ 展开式各项的系数，并掌握了高次幂的开方法，这是一项惊人的成就。

在欧洲，一般认为二项展开式是法国数学家帕斯卡（Pascal，1623 ~ 1662）于 1653 年发现的，把它称为帕斯卡三角。后来发现中亚细亚阿尔卡西（Al-Kashi，? ~ 1429）在 1427 年《算术之钥》一书中记载过此图。

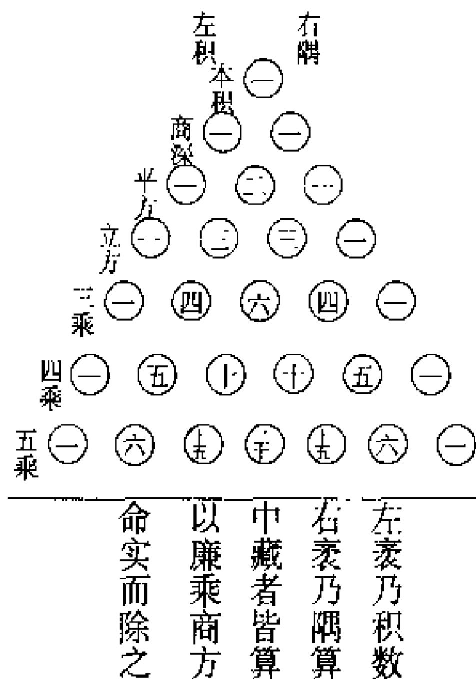


图 6

事实上，在 1023 ~ 1050 年间贾宪著《黄帝九章算术细草》中就已经记载了“开方作法本源”图。比阿尔卡西早 400 年，比帕斯卡早 600 年。杨辉在《详解九章算法》中记载更详，所以应该称为贾宪、杨辉三角。

3.1.13 最早的不定方程

《九章算术》“方程”章 13 题“五家共井”问题（公元前 300 年）是世界上最早的不定方程。13 题是“今有五家共井，甲二绠不足，如乙一绠；乙三绠不足，如丙一绠；丙四绠不足，如丁一绠；丁五绠不足，如戊一绠；戊六绠不足，如甲一绠。如各得所不足一绠，皆逮。问井深绠长各几何？答曰：井深七丈二尺一寸，甲绠长二丈六尺五寸，乙绠长一丈九尺一寸，丙绠长一丈四尺八寸，丁绠长一丈二尺九寸，戊绠长七尺六寸。

用现在的解法，设井深 h，甲乙丙丁戊各家绳长 x、y、z、u、v，依题意列出六元方程组（只有五个方程）：

$$h = 2x + y = 3y + z = 4z + u = 5u + v = 6v + x$$ 。

六世纪的《张邱建算经》提出的“百鸡术”也是三元不定方程组，《九章算术》盈不足章也有不定方程。

西方最早研究不定方程的是希腊数学家丢番都（Diophantus，246 ~ 330），比《九章算术》晚 600 年，在他著的《算术》中讨论了不定方程

$$Ax^2+c=y^2,\quad Bx+C=y^2,\quad x^2+y^2=z^2\ 。$$

第三个不定方程的研究，导致了费马猜想。

3.1.14 圆周率的精度记录

圆周率是圆周长与直径的比值，不是有理数，是实际应用和理论研究中一个重要的数据。德国一位数学家说过："历史上一个国家所算得的圆周率的准确程度，可以作为衡量这个国家当时数学发展的一个标志。"

圆周率的研究我国远比世界各国早。东汉刘歆（公元前 50 ~ 公元 23）作《三统磨》（约公元前 7 世纪）定

$$\pi=3.1547,$$

史称歆率，张衡（78 ~ 139）曾用

$$\pi=\frac{92}{29}\ (=3.1724),\quad \pi=\sqrt{10}\ (=3.162)\ ,$$

三国时王蕃（228 ~ 266）定

$$\pi=\frac{142}{45}\ (=3.15)\ ,$$

刘徽于 263 年始创割圆求圆法，算出

$$\pi=3.141024\cdots\ ,$$

应用时曾用

$$\pi=\frac{157}{50}=3.14,\quad \pi=\frac{3927}{1250}=3.1416\cdots\ 。$$

史称徽率，南宋祖冲之（429 ~ 500）用缀术求得正率

$$3.1415926<\pi<3.1415927;$$

又定约率

$$\pi=\frac{22}{7}\ ,$$

密率

$$\pi=\frac{355}{113}=3.1415929\cdots\ 。$$

史称祖率，这一纪录保持了 1100 多年。1573 年才由德人鄂图发现。

祖冲之注《九章算术》称求圆内接 1536 边形的各边可得周 3927 而径 1250，即刘徽用过的

$$\pi=\frac{3927}{1250}=3.1416,$$

就是现在通用的近似值。

后来有人把 π 展成连分数：

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 +} \frac{1}{15 +} \frac{1}{1 +} \frac{1}{292 +} \frac{1}{1 +} \frac{1}{1 +} \frac{1}{1 +} \frac{1}{2 +} \frac{1}{1}$$

$$+ \frac{1}{3 +} \frac{1}{1 +} \frac{1}{12 +} \frac{1}{2 +} \frac{1}{4 +} \frac{1}{1 +} \cdots$$。

前四个渐近分数是

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113},$$

其中有两个近似值是祖冲之的杰作。

近代由于天文、物理和数学的需要，用电子计算机算出 π 的值准确到小数二百万位。

3.1.15 祖暅公理

祖暅（音 gèng）是祖冲之的儿子，南北朝（420～581）时的数学家。他发现了等积原理："夹在两平行平面间的两个几何体，被平行于两平行平面的任何平面所截，如果截面的面积恒相等，则这两个几何体的体积相等。"史称祖暅公理，祖暅利用这条公理推导出球体积公式：

$$V_{球} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{6}\pi D^3$$。

祖暅公理的价值不仅在于利用它可以解决刘徽遗留下来探求体积问题，还在于这种理论就是微积分原理的雏形。用祖暅公理可以解决许多要用现在的积分法才能解决的问题。

在西方，这个公理到 17 世纪才由意大利数学家卡瓦利里（Cavalieri，1598～1647）发现，称为卡瓦利里原理，比祖暅晚 1100 多年。

3.1.16 高次方程的数值解法与天元术

前面提到贾宪的"增乘开方法"已解决二项方程如

$$x^2 = a, \quad x^3 = b, \quad x^4 = c,$$

求正根的问题，到 7 世纪唐代王孝通解决了三次方程的数值解法。欧洲到 13 世纪才由意大利斐波那契提出，比我国晚 600 多年。

北宋刘益 1080 年著《议古根源》利用增乘开方法推广以解高次方程，他解过四次方程

$$-5x^4 + 52x^3 + 128x^2 = 4096 \qquad (x_1 = 4)$$。

13 世纪南宋数学家秦九韶在《数书九章》（1247）中发明了"正负开方术"，解决了高次方程的数值解法。这个问题在欧洲到 1804 年才由意大利数学家鲁非尼（Ruffini，1765～1822）解决，1819 年英国数学家霍纳（Horner，1786～1837）提出了求实根近似值的霍纳法，比秦九韶法晚 572 年。

秦九韶在《数书九章》中叙述了二十多个高次方程的数值解法，大都是从测量降雪深度，求各种形状田地的面积、测量问题、粮仓计算等实际问题中列出的方程，如“开连枝某乘方”、“开玲珑某乘方”等法。解答的方程有

$$400x^4 - 2930000 = 0 \qquad (x_1 = 9\frac{764}{3439}) \quad ;$$

$$-x^4 + 15245x^2 - 6262506.25 = 0 \qquad (x_1 = 20\frac{1298025}{2362256}) \quad ;$$

$$x^{10} + 15x^8 + 72x^6 - 864x^4 - 11664x^2 - 34992 = 0 \qquad (x_1 = 3)$$

等。现以解

$$-x^4 + 763200x^2 - 40642560000 = 0 \qquad (x_1 = 840)$$

为例，说明秦九韶法的过程。当时用的是数筹，在图式之右有注文。

1

	商
−40642560000	实
0	虚方
+763200	从上廉
0	虚下廉
−1	益隅

2

800	商
−40642560000	负实
0	虚方
+763200	从上廉
0	虚下廉
−1	益隅

3

800	商
+38205440000	正实
+98560000	[从] 方
+123200	[从] 上廉
−800	[益] 下廉
−1	益隅

4

800	商
+38205440000	[正] 实
−826880000	[益] 方
−1156800	[益] 上廉
−1600	[益] 下廉
−1	益隅

5

800	商
+38205440000	[正] 实
−826880000	[益] 方
−3076800	[益] 上廉
−2400	[益] 下廉
−1	[益] 隅

6

800	商
+38205440000	[正] 实
−826880000	[益] 方
−3076800	[益] 上廉
−3200	[益] 下廉
−1	[益] 隅

7		
	800	商
	+38205440000	[正] 实
	-826880000	[益] 方
	-3076800	[益] 上廉
	-3200	[益] 下廉
	-1	[益] 隅

8		
	续商 840	
	00000000000	实空
	-955136000	[益] 方
	-3206400	[益] 上廉
	-3240	[益] 下廉
	-1	[益] 隅

注：商——根；实——常数项；方——一次项系数；从上廉——二次项系数；下廉——三次项系数；益隅——最高次项系数（本例为四次项系数）。

"天元术"就是布列一元方程的方法。古时要说明一个数学问题，解一道方程，好像写一段文章，又长又烦琐，不容易看懂。我国到13世纪数学家李冶（1192～1279）把前人列方程的方法分析、比较、总结、简化，名为"天元术"。在他著的《测圆海镜》（1248）、《益古演段》（1259）中有"立天元一为某某"，就是设 x 为某某，根据题意列出两个相等的代数式。这种方法，欧洲到16世纪才出现，称为半符号代数，比李冶晚300多年。

李冶的代数方程的写法与小数的记法在天元术中都有新的改进，他把各项的位数上下对齐，例如方程：

$$-1.96x^2-84x+900=0$$

记为

𝍨	0	0	太
	𝍢	𝍫	
丨	𝍣	𝍡(斜线)	

"太"表常数项，下一行表元的一次项，再下一行表元的二次项，只写系数，并把个位对齐，负系数在最后一个数字上划一条斜线，这样小数点也可以省略，正负也分清了，在当时这种数字式是最先进的了。

3.1.17 四元术

元代数学家朱世杰在贾宪、秦九韶、李冶的一元高次方程的基础上建立了天地人物四元高次方程组的理论，为我国又创一项世界纪录。

在欧洲，较长时期用一个符号表示不同的未知数，以致含混不清，导致多元方程组无法深入讨论。到1559年才由法国人彪特（Bateol）开始用不同字母表示不同

的未知数，1764 年法人培祖(Bezout，1730－1783)提出用消元法解多元方程组，1779 年才发表解法，比朱世杰的四元术晚四五百年。

朱世杰在他的《四元玉鉴》中有“四象细草假令之图”，讲了四元方程的布算方法和各元的排列方式，规定太极(简记为太，即常数项)放在中央，天元(x)在太下，天元下是天元方(x^2)，地元(y)在太之左，人元(z)在太之右，物元(u)在太之上。若有方程

$$x^3+4xy+2x^2y+x^3y-2y^2-xy^2+3xz-8u=0$$

可表为下图：

0	0	𝍧̸	0
𝍡̸	0	太	0
𝍠̸	𝍣	0	𝍢
0	𝍡	0	0
0	𝍠	𝍠	0

		y^2	y		z	z^2	
		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
u^2	…	y^2u^2	yu^2	u^2	zu^2	z^2u^2 …	u^2
u	…	y^2u	yu	u	zu	z^2u …	u
	…	y^2	y	太	z	z^2 …	
x	…	xy^2	xy	x	xz	xz^2 …	x
x^2	…	x^2y^2	x^2y	x^2	x^2z	x^2z^2 …	x^2
		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
		y^2	y		z	z^2	

左图也表示方程左端的多项式，为方程或多项式，由上下文确定，右图是左图的解释。

虽然这种表示法不如今天的方便，但在当时受算筹的局限，可谓匠心独造了。

朱世杰还用消元法解下面的三元三次方程组：

$$\begin{cases}-x-y-xy^2-z+xyz=0\\ x-x^2-y-z+xz=0\\ x^2+y^2=z^2\end{cases}$$

消去 y 后得到 x,z 的方程组：

$$\begin{cases}(1-z)x^3+(1+z+z^2)x^2+(-2-z-2z^2)x=0\\ x^4+(-2-2z)x^3+(2+4z+z^2)x^2+(-2z-2z^2)x=0\end{cases}$$

他巧妙地消去 x，得到

$$-5+6z+4z^2-6z^3+z^4=0\quad。$$

用正负开方术解出正根 $z_1=5$，于是得

$$x_1=3,y_1=4\quad。$$

经验算，$x_1=3,y_1=4,z_1=5$ 是正确的答案。

朱世杰在 1303 年所创四元术的纪录，是领先世界水平的。

3.1.18 招差术(逐差法,高阶等差数列)

招差术,现在称逐差法,也是朱世杰首创的世界纪录。

这里举《四元玉鉴》中"如象招数"的例题来说明"招差术"的方法。

"或问……以立方招兵,初招方面三尺,次招方面转多一尺……今招十五日……问招兵……几何?"

题意是,某地招兵,第一日招 3^3 人,第二日招 4^3 人,第三日招 5^3 人…,第十三日招 15^3 人,问共招兵多少人?

设 a_n 表第 n 日招兵人数,s_n 表 n 日共招兵人数,于是有

$$a_1=3^3=27,\quad a_2=4^3=64,\quad a_3=5^3=125,$$
$$a_4=6^3=216,\quad a_5=7^3=343,\quad a_6=8^3=512,\cdots$$

将这个数列写出,并求出差分:

"上差" 27 64 125 216 343 512 …

"二差" 37 61 91 127 169 …

"三差" 24 30 36 42 …

"下差" 6 6 6 …

朱世杰的解法是:"求得上差(Δ)二十七,二差(Δ^2)三十七,三差(Δ^3)二十四,下差(Δ^4)六。求兵者:今招为上积,又以今招减一为茭草底子积为二积,又今招减二为三角底子积为三积,又今招减三为三角落一积为下积,以各差乘各积,四位并之,即招兵数也。"

上文给出了招差公式:

$$S_n=n\Delta+\frac{1}{2!}n(n-1)\Delta^2+\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\Delta^3$$
$$+\frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)\Delta^4+\cdots,$$

$$S_{13}=13\cdot 27+\frac{1}{2}13\cdot 12\cdot 37+\frac{1}{6}13\cdot 12\cdot 11\cdot 24+\frac{1}{24}13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 6$$
$$=351+2886+6864+4290=14391\ 。$$

现在我们称所给的数列为高阶等差数列,令上差为 a_1,二差为 d_1,三差为 d_2,…,下差为 d_r。对本例说 $r=3$,三阶差的各项都相等,称为三阶等差数列。朱世杰的招差公式就是现在的高阶等差数列求和公式:

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2!}d_1+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}d_2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-r)}{(r+1)!}d_r\ 。$$

这个公式是牛顿在1672~1678年获得的,比朱世杰晚四百年。

3.1.19 二次内插法

隋朝天文学家刘焯(544~610)在《皇极历》中创造了"等间矩二次内插法"。我

们用现在的符号来说明这种方法。

设有数列

$$f(n)=2n-1: \quad 1,3,5,7,9,\cdots$$

求等距离的中项,显然是 2,4,6,8,…

如果数列

$$f(n)=n^2: \quad 1,4,9,16,25,\cdots$$

如何求等距的中项呢？刘焯创造了下面的方法。

设有时间 t 的函数 $f(t)$，s、l 为每个分段的时间，且

$$0<s<l, \quad n=1,2,3,\cdots$$

由已知的 $f(nl)$ 求 $f(nl+s)$ 的值。设

$$\Delta_1=f(nl+l)-f(nl),$$
$$\Delta_2=f(nl+2l)-f(nl+l),$$

刘焯得出公式

$$f(nl+s)=f(nl)+\frac{s}{l}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{s}{l}(\Delta_1-\Delta_2)+\frac{s^2}{2l^2}(\Delta_1-\Delta_2) 。$$

求太阳现行度数时,为一个节气的时间;求月行度数时,l 为一日的时间。当 $l=1$ 时,上述公式可简化为

$$f(n+s)=f(n)+\frac{s}{2}(\Delta_1+\Delta_2)+s(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{s^2}{2}(\Delta_1-\Delta_2) 。\qquad (1)$$

727 年唐代天文学家僧一行(683～727)造《大衍历法》。在刘焯内插公式的基础上创立“不等间距二次内插公式”:

$$f(t+s)=f(t)+s\frac{\Delta_1+\Delta_2}{l_1+l_2}+s\left(\frac{\Delta_1}{l_1}-\frac{\Delta_2}{l_2}\right)-\frac{s^2}{l_1+l_2}\left(\frac{\Delta_1}{l_1}-\frac{\Delta_2}{l_2}\right) 。\qquad (2)$$

822 年晚唐天文学家徐昂造《宣明历》,在僧一行公式的基础上再简化为

$$f(n+s)=f(n)+s\Delta f(n)+\frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 f(n) 。\qquad (3)$$

其中

$$\Delta f(n)=\Delta_1=f(n+1)-f(n) ,$$
$$\Delta^2 f(n)=\Delta_2-\Delta_1=[f(n+2)-f(n+1)]-[f(n+1)-f(n)] 。$$

当三阶差 $\Delta^3 f(n)=0$ 的条件下,刘焯公式(1)和徐昂公式(3)与牛顿内插公式并无二致,而刘焯比牛顿早一千多年。

我国古代数学的成就

项　目	年　代	与西方对比
十进制记数法	公元前 2650	印度 1600B.C.
八卦与二进制	公元前 1135	莱布尼兹(1700)
纵横图	杨辉(1275)	度勒版画(1514)
勾股定理	陈子(前 1100)	毕达哥拉斯 550B.C.
几何学	墨子(前 450)	欧几里得 350B.C.
分数运算	《九章》(前 500)	印度七世纪
小数运算	《九章》(前 300)	印度七世纪
负数概念	《九章》(前 300)	印度七世纪
比例	《九章》(前 300)	印度七世纪
线性方程组	《九章》(前 300)	九世纪传入中亚
开方术	《九章》(前 300)	亚历山大四世纪
重差术	陈子(前 1100)	塔利斯 600B.C.
中国剩余定理	《孙子算经》(三世纪)	高斯(1840)
二项式定理	贾宪(1050)	帕斯卡(1653)
不定方程	《九章》(前 300)	希腊丢番都(300)
圆周率精度纪录	祖冲之(460)	鄂图(1573)
祖暅公理	祖暅(500)	意大利卡瓦利里(1640)
高次方程数值解法	王孝通(630)	意大利斐波那契(1240)
秦九韶法	秦九韶(1247)	霍纳法(1819)
半符号代数	李冶(13 世纪)	欧洲十六世纪
四元术	李冶(13 世纪)	彪特(1559)
逐差法	朱世杰(1303)	牛顿(1678)
二次内插法	刘焯(600)	牛顿(1678)
不等间距二次内插法	僧一行(727)	牛顿(1678)

从以上二十多项成就看来,我国从公元前 11 世纪到公元 14 世纪,这两千多年数学研究从未间断,特别是唐至宋元,名家辈出,盛况空前,确是数学先进发达的"数学王国"。有必要对遗留的专著作深入的探究,以利继承与发展,并纠正所谓"中国无数学"的谬论。

3.2 算经十书

从公元前 11 世纪以来,我国数学家撰写了许多不朽的专著,其中算经十书,是汉唐时期遗留下来的十部数学专著,曾经唐代李淳风(? ~714)等人注释。原来的十书,包括祖冲之与祖暅合撰的《缀术》,到北宋重刊时,《缀术》已经失传,1213 年时用徐岳所著《数术记遗》凑成十书,现摘要介绍,以明梗概。

3.2.1 《周髀算经》

《周髀》是周朝(公元前 1100 ~ 公元前 100 年)以来有关数学的专著,不是某一人的手笔,据考证大约成书于公元前 235 ~ 公元前 157 年(前 235 年是《吕氏春秋》成书的年代,公元前 157 年是汉景帝即位的年代),全书分上下两卷,主要内容有勾股定理、测量术、分数运算、天文和历法,都是世界上最新记录的记载。

所谓周髀,语出《周髀算经》卷上:"荣方曰:周髀者何? 陈子曰:古时天子治国,此数望之从周,故曰周髀,髀者表也。"它是指用来测量日影的表。这本书是记载从周代传下来的一些数学方法,所以称为"周髀算经"。

《周髀》中记载了复杂的分数运算,如:"内一衡径二十三万八千里,周七十一万四千里,分为三百六十五度四分度之一。度得一千九百五十四里二百四十七步千四百六十一分步之九百三十三。"

"内一衡"是一个直径为 238000 里的圆周,周长就是

$$238000 \times 3 = 714000(\text{里})。$$

《周髀》中使用的圆周率是 $\pi = 3$,整个圆周分为$365\frac{1}{4}$度(《周髀》定一年为 $365\frac{1}{4}$日),每一度的弧长为

$$714000 \div 365\frac{1}{4} = 714000 \div \frac{1461}{4} = 7140000 \times \frac{4}{1461}$$

$$= 2856000 \div 1461 = 1954\frac{1206}{1461}(\text{里}),$$

1 里 = 300 步,再将分数分为步:

$$\frac{1206}{1461} \times 300 = 247\frac{933}{1461}(\text{步})。$$

3.2.2 《九章算术》

《九章算术》不知何时何人编著,但经过汉代数学家张苍(250 ~ 152B.C.)和耿寿昌(约前 50)的整理,估计是公元前三世纪的作品,后经三国时数学家刘徽作注(263 年)。

《九章算术》记载 246 个问题,分为九章,故名。

第一章方田,是讲平面图形面积的计算方法,如 25 题:"半广以乘正从",是指三角形的面积是底乘高的一半。又如邪田:"并两斜面半之以乘正从",是指梯形的面积是

$$\frac{1}{2}(\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高}。$$

又如 31 题:"今有圆田,周三十步,径十步,问为田几何?答曰:七十五

步"，是计算圆面积的方法。"术曰：半周半径相乘得积步"，即

$$圆面积 = \frac{1}{2}(2\pi r)\cdot r = \pi r^2 。$$

"径一周三"是当时 π 的近似值为 3，刘徽在《九章算术注》中指出："圆径一而周三"是不精确的，那是圆内接正六边形的周长而不是圆周长。

第二章粟米，是讲粮食交换的计算方法，先规定各种粮食之间的交换率，再用"今有率"（比例）计算。

第三章衰分，是用配分比例、等差数列、等比数列来演算应用问题。

第四章少广，是从田亩的面积求边长，从球的体积求径长的计算方法。提出了开平方、开立方的法则。如 22 题中有

$$\sqrt[3]{1937541\frac{17}{27}} = 124\frac{2}{3} 。$$

还提出"开圆术"、"开立圆术""。"开圆"是从圆面积求圆周的方法：

$$l = 2\pi r = \sqrt{4\pi A},$$

l：圆周长，A：面积。原文用 $\pi = 3$，因而

$$l = \sqrt{12A} 。$$

"开立圆"是从球体积（V）求直径（d）的方法，公式是

$$d = \sqrt[3]{\frac{16V}{9}} 。$$

这个公式误差较大，祖冲之修正为

$$d = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}} 。$$

第五章商功，讲各种立体求体积的方法。

第六章均输，讲粮食运输和平均负担的计算方法，运用了配分比例、复比例、等差数列等。

第七章盈不足，讲线性方程组（见§3.1.8）。

第八章方程，是将一个应用题用算筹列成方阵的形式去求解，可以视为是最早的数学化方法，也称方程模式。

解方程时为了消去某一元，时常遇到从小数减去大数，这就不得不引入负数。我国是世界上最早引进负数的国家。

第九章勾股，是利用勾股定理解应用题。

3.2.3 《海岛算经》

刘徽在注《九章算术》时，根据张苍整理的《九章算术》后面附有"重差"算法，刘徽把它与《九章算术》分离，成为单行本，因其第一题是测量海岛，遂

命名为《海岛算经》。

重就是重复，差是日影的相差，测量两次求出日影之差，就可以算出距离，是一种测量可望而不可及的目标的方法。其算法利用了相似三角形对应边成比例的理论。其测量技术远远超过了当时的西方，即使欧洲十六七世纪的测量术也望尘莫及。

《海岛算经》第一题："今有望海岛，立两表齐高三丈，前后相去千步，今后表与前表参相直，从前表却行（向后退行）一百二十三步，人目着地，取望岛峰，与表末参合。从后表却行一百二十七步，人目着地，取望岛峰，亦与表末参合。问岛高及去表各几何？答曰：岛高四里五十五步，去表一百二里一百五十步。"

"术曰：以表高（h）乘表间（d）为实（分子），相多（a）（图7中 BC 与 EF 的差）为法（分母），除之，所得加表高，即得岛高（IS）。求前表去岛远近者，从前表却行（b）乘表间（d）为实，相多（a）为法，除之，得岛去表里数。"即

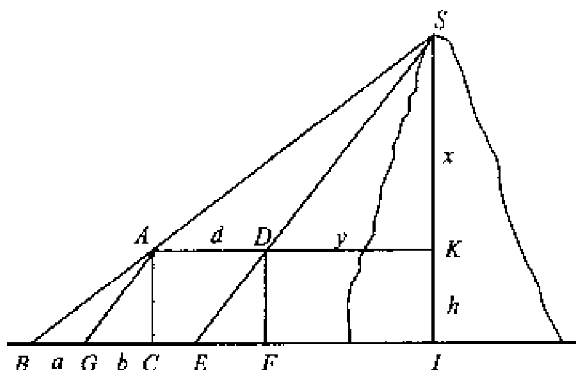


图7

岛高 $= x + h = \dfrac{hd}{a} + h = \dfrac{5 \cdot 1000}{127-123} + 5 = 1255$（步）$= 4$ 里 55 步；

去表 $= y = \dfrac{hb}{a} = \dfrac{123 \cdot 1000}{127-123} = 30750$（步）$= 102$ 里 150 步。

3.2.4 《孙子算经》

《孙子算经》的作者不详。据戴震（1724～1777）等的考证，大约是公元 67～270 年间之作。全书分三卷，上卷讨论度量衡的单位和筹算的制度及其方法；中卷是分数的应用题，包括面积、体积、等比数列的计算题；下卷是杂题，其中第 26 题是驰名于世的中国剩余定理（见§3.1.11）。

《孙子算经》下卷引题："今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何？答曰：雉二十三，兔一十二。"就是"鸡兔同笼"问题，作为算术中的典型问题达数百年。后来转到日本，称"鹤龟算"。

3.2.5 《五曹算经》

《五曹》是为地方行政职员编写的应用数学书。作者年代不详。北宋欧阳修（1007～1072）《新唐书》卷五十九《艺文志》载："甄鸾《五曹算经》五卷"，甄鸾是 535～566 年前后南北朝时的数学家，他写过很多作品，都没有署过自己的

名字，《五曹》可定为五六世纪魏晋时期的作品。全书内容包括田曹、兵曹、集曹、仓曹、金曹五部分，所以得名。主要叙述计算各种形状的田亩面积、军队给养、粟名互换、租税、仓库储存物品的容积、丝帛和物品的交易等问题。

3.2.6 《夏候阳算经》

《夏候阳算经》原本早已失传，著作年代无法考证。现在的传本是后人传刻的，内容包括用乘除快算方法和解日常生活中的应用题。

《夏候阳算经》卷一有："至梁大同元年（535 年）甄鸾校之，"可以认为是 6 世纪甄鸾时代的作品。

书分三卷，卷上"明乘除法"有："十乘加一等，百乘加二等，千乘加三等，万乘加四等。""十除退一等，百除退二等，千除退三等，万除退四等。"可以解释为

$$10=10^1,\ 100=10^2,\ 1000=10^3,\ 10000=10^4;$$

$$\frac{1}{10}=10^{-1},\ \frac{1}{100}=10^{-2},\ \frac{1}{1000}=10^{-3},\ \frac{1}{10000}=10^{-4}。$$

果然如此，则我国不仅是最早使用负数的国家，而且是最早具有负指数概念的国家。

3.2.7 《五经算术》

《五经算术》一般认为是甄鸾所作，是对《诗》《书》《易》《礼》《春秋》中有关数字计算的一些解释，大部分是讲历法和乐律，没有算题。

3.2.8 《张邱建算经》

《张邱建算经》是南北朝（420～581）时张邱建撰写的，内容包括等差数列、二次方程、不定方程等问题的解法。甄鸾有注释，约成书于六世纪中叶，该书以提出"百鸡术"而著称。

《张邱建算要》卷下 38 题："今有鸡翁一，值钱五；鸡母一，值钱三，鸡雏三，值钱一。凡百钱，卖鸡百只，问鸡翁、母、雏各几何？答曰：鸡翁四，鸡母十八，鸡雏七十八；又答：鸡翁八，鸡母十一，鸡雏八十一。又答：鸡翁十二，鸡母四，鸡雏八十四。""术曰：鸡翁每增四，鸡母每减七，鸡雏每益三，即得。"

用现在的写法，得方程组：

$$\begin{cases}5x+3y+\frac{1}{3}z=100,\\ x+y+z=100\end{cases}。$$

这是不定方程，有三组正整数解：

(4，18，78)，(8，11，81)，(12，4，84)

上节 3.1.13 曾介绍过不定方程。

3.2.9 **《算术记遗》**

《算术记遗》是汉代徐岳所作。徐岳于汉灵帝（168～188）时从刘洪（约 160～200）学历算。刘洪说："吾曾游天目山中，见有隐者，世莫知其名，号天目先生。先生曰：隶首注术，乃有多种，及余遗忘，记忆数事而已。"徐岳把刘洪所引天目的话，记载下来，名为《算术记遗》。内容有积算、太乙、两仪、三才、五行、八卦、九宫、运筹、了知、成数、把头、龟算、珠算、计数等 14 种。以后甄鸾作过注释，日本三上义夫在《中国算学之特色》中作过一些推测。

"积算"即筹算，和现在的算盘很相象："位各五珠，上一珠与下四珠色别，其上别色之珠当五，其下四珠，珠各当一"。显然与算盘的作用是相同的。

《算术记遗》的所载说明我国古代的计算器为其他各国所未见，也是领先于世界的。

3.2.10 **《缉古算经》**

唐代王孝通著《缉古算经》，时约公元 630 年，是《算经十书》最晚的一种，其巨大的学术价值在于它是世界上最早提出三次方程解法的著作。

《缉古算经》20 个问题中，第一题是历法，其余是体积计算和勾股定理的应用题，多处用到三次方程。如第十五题："假令有勾股相乘，幂七百六、五十分之一；弦多于勾三十六、十分之九。问三事各多少？答曰：勾十四、二十分之七；股四十九、五分之一；弦五十一、四分之一。"

用现在的写法，设勾长 x，股长 y，则

$$\begin{cases} xy = 706\frac{1}{50} \quad (=P) \\ \sqrt{x^2+y^2} - x = 36\frac{9}{10} \quad (=Q) \end{cases}$$

消去 y，得三次方程：

$$x^3 + \frac{Q}{2}x^2 = \frac{P^2}{2Q} \quad ,$$

将 P、Q 之值代入，得

$$500x^3 + 9225x^2 - 3377129 = 0 \quad ,$$

解出有理根

$$x_1 = \frac{287}{20} = 14\frac{7}{20} \quad （勾长） \quad ,$$

$$x_1 + Q = 51\frac{1}{4} \quad （弦长） \quad ,$$

$$\frac{P}{x_1} = 49\frac{1}{5} \qquad （股长）。$$

又如第二题造仰观台，列出的方程是

$$3x^3 + 51x^2 + 215x - 5033 = 0 \quad ,$$

解出有理根 $x_1 = 7$。

这几个三次方程的求解，都是不寻常的，有一定的难度，与欧洲 1535 年的数学竞赛题不相上下，而这里是纪元 630 年，比西欧早 900 年。

从王孝通到宋元两代学者的研究，发展成为一般高次方程的解法——天元术。

以上 10 种合称为《算经十书》，记载了我国从纪元前 1100 年到纪元 630 年间的数学成就。以后数学家叠起，专著甚多。如

刘　洪　(160～200)　《乾象历》(174)；

祖冲之　《大明历》(510)；

刘　焯　《律历志》(600)；

僧一行　《大衍历》(724)；

刘　牧　(1011～1064)《易数钩隐》；

刘　益　《议古根源》(1080)；

沈　括　《梦溪笔谈》(1088)；

秦九韶　《算书九章》(1247)；

李　冶　《测圆海镜》(1248)、《益古演段》(1259)；

贾　宪　《黄帝九章细算》(约 1200)；

杨　辉　《详解九章算术纂类》(1261)、《续古摘奇算法》、《田亩比类乘除捷法》(1275)；

郭守敬　《授时历》(1280)；

朱世杰　《四元玉鉴》(1303)；

陶宗仪　《辍耕录》(1366)；

吴　敬　《九章算法比类大全》(1450)；

顾应祥　《测圆海镜分类释术》(1550)、《测圆术》(1553)；

柯尚迁　《数学通轨》(1578)；

程大位　《算法统宗》(1592)；

徐光启、利玛窦合译几何原本前 6 卷 (1606)、徐光启《测量全义》(1631)；

李之藻、利玛窦合译《同文算指》(1566～1631)；

薛凤祚　《曆学会通》(1664)；

薛凤祚、穆尼阁（波兰）合编《比例对数表》；

梅文鼎　《梅氏曆算丛书辑要》(1693)；

梅谷成　《增删算法统宗》(1760);

戴　煦　《对数简法》(1845)、《续对数简法》(1846)、《假数测圆》(1852)总名《求表捷算》;

李善兰　(1805~1860)与伟烈亚力合译《几何原本》后九卷;

李善兰　《测古昔斋算学》(1867)、《行素轩算稿》(1882)等。

这里论及清代为止，限于篇幅，只得从略。

有人问:"我国古代数学家如此之多，研究成果如此之大，有无政治上的支持、儒家思想的影响?"孔子以六艺(礼、乐、射、御、书、数)治学。当时学术界比较重视技术和数学，因而数学得以繁衍，但"学而优则仕"仍是主流。我国古代数学基本上是从实际需求与数学家个人兴趣发展起来的，既无政策鼓励，也无物质刺激。我们的先辈凭借对祖国的忠诚，对数学的爱好，靠勤奋拼搏，为人民排忧解难作贡献。这种精神，这种传统，是我中华民族引以自豪、引以为训的。

3.3　明清以来我国数学的停滞

宋元时期(960~1368)是中国数学的极盛时期。明代(1368~1644)以后，欧洲逐渐进入资本主义社会，数学受生产力的发展而发展起来。他们设置科学院，兴办大学，广聘教授，培养人材。而我国仍处在封建王朝的统治，固步自封，夜郎自大，且推行八股取士，严禁言论自由，大兴文字冤狱，成为社会向前发展的桎梏。

这时西方传教士源源不断来到中国，明万历年间(1582)意大利传教士利玛窦(1552~1610)来广州、南昌，在南京结识徐光启(1562~1633)。两人共同研究西方数学。1607年在北京出版了两人合译的《几何原本》前6卷，从此打开了中西学术交流的大门。

利玛窦和李之藻(1566~1630)合译《同文算指》，李善兰和伟烈亚力合译《几何原本》后九卷与德模干的《代数学》、罗密士的《代微积拾级》等书对我国传统数学有很大的冲击，暴露了我国在书写格式上的落后。

以《数理精蕴》和《同文算指》为例，数码仍用一二三……九0;加用丄，减用丅;分母置于分数线之上，分子置于线下;用甲乙丙……十干，子丑寅……十二支，天地人物四元代替英文26个字母;用角亢氐房……二十八宿代替希腊字母;π译作周;自然对数底e译作讷;用对代替ln;用彳代替微分;用禾代替积分，比如:

$$\int \frac{dx}{a+x} = \ln(a+x) + c$$

记为

$$\text{禾}\frac{\text{甲}\perp\text{天}}{\text{彳天}}=(\text{甲}\perp\text{天})\ \text{对}\ _\text{丙}$$

(大写 C 记为丙，小写 c 记为丙)：

$$f(x+h)=y+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}h+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\frac{h^2}{2!}+\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}\frac{h^3}{3!}+\cdots$$

记为

$$\text{函}(\text{天}\perp\text{辛})=\text{戌}\perp\frac{\text{彳天}}{\text{彳戌}}\text{辛}\perp\frac{\text{彳}''\text{天}''}{\text{彳}''\text{戌}}\times\frac{\text{一}\cdot\text{二}}{\text{辛}''}\perp\frac{\text{彳}'''\text{天}'''}{\text{彳}'''\text{戌}}\times\frac{\text{一}\cdot\text{二}\cdot\text{三}}{\text{辛}'''}\perp\cdots$$ 。

当时我国学者已经知道了西方书写格式的优越性，仍要坚持自己落后的格式，以致裹足不前，无所进展。

明清以来，我国古代数学的停滞，究其原因，大约有以下几点，检讨过去，共策未来。

第一，我国数学自身的弱点，我国自古使用算筹，公式的叙述和书写的格式陈旧落后，文字艰涩，不易理解，印刷术没有跟上，不易流传，学术交流很差，没有研究数学的机构，没有培养人材的学校。数学家各自为阵，缺乏推敲讨论之风。我国自古闭关自守。保守之风，习以为常。因而在西算输入之际，不能兼容并蓄，以致坐失良机。

第二，历代王朝忽视科技忽视数学。我国的科举制度，从隋（604 年）到清前后一千三百多年，只有唐代分科取士，把“明算”（数学）列为应试科目，到北宋蔑视数学，认为“徒有烦费，于国事无补”。元代考试，砍掉了数学，以“四书”为主，以后发展为“八股取士制”，清文学家顾炎武说：“八股之害，甚于焚书。”元制还规定：“人有十等，一官二吏，先之者贵人也，三僧四道五医六工七匠八娼九儒十丐，后之者贱之也。”把知识分子列为第九等，明袁黄、王世贞说：“嗟乎卑哉，介乎娼之下丐之上者，今之仔也。”加上文字狱迭起，学者动辄得咎，学术讨论，望而却步。

第三，生产落后，民食为艰，数学排不上用场。元朝统治时期，中国社会经济遭受严重的摧残，民不聊生。随着农业工商业的衰退，数学理论没有更多的需要，失去了源泉，其停滞也就不言而喻了。

欧洲在中世纪还处于黑暗时期，生产破坏，思想窒息，有数学家因解出三次方程超过神的智慧而被处死，比我国落后好几百年。但是，经过文艺复兴、产业革命，尊重科学技术，重视人材培养，科学界异军突起，后来居上，欧洲的历史，值得借鉴，今日的形势，一反前态，我国人民的志气和智慧，并不逊人，还我“数学王国”，此其时矣。

3.4 中国古代数学史的分期

中国古代数学在世界数学史上占有重要的地位，这是举世公认的，它的分期却无定论。现就各方意见，加以综述。

中国古代数学史大致可分为四个时期：

（1）萌芽和初步发展时期——汉朝初年（公元前1世纪）以前约二三千年时期。这一时期数学的主要成就有：

发明十进制记数方法；把数的概念从整数扩充到分数、负数，建立了数的四则运算的算术系统；发明了算筹计算工具；发明规矩，用来作图和测量；几何方法广泛应用；发现了勾股定理；用方程解决应用问题达到较高的水平；编出了一些系统的数学专著等。

（2）繁荣时期——从汉朝初年到隋朝中叶（公元7世纪）约700多年时期。这一时期数学的主要成就有：

整理和注释《九章算术》；圆周率的计算；几何学的应用；编出了更多的数学专著等。

这一时期出现的著名数学家有刘徽、祖冲之、祖暅等。

（3）全盛时期——隋朝中叶（公元7世纪）到元朝末年（1368年）约700年时期。这一时期数学的主要成就有：

全国建立数学教育制度，学校设立数学专业；《算经十书》的编辑；数学新理论不断出现，如高次方程解法、大衍求一术、隙积术、垛积术、贾宪杨辉三角、招差术、开方术等。

这一时期出现的著名数学家有王孝通、李淳风、僧一行、沈括、李冶、贾宪、杨辉、秦九韶、郭守敬、朱世杰等。

据《隋书·百官志》记有国子监（大学）、祭酒（校长）的职权范围，祭酒管理算学等专业，到唐代显庆元年（656年）。国子监添设算学馆，设有博士、助教，指导学生学习数学，专门培养数学人才，李淳风等奉命审定历代数学专著，作为国子监中算学馆的教科书，国子监还定出了学习年限，每月有考试，数学教育逐步完善，对数学的发展有着重要的意义。

（4）西方数学传入时期——从明朝初年（1368）到清朝中叶（18世纪中叶）约三百年时期。

这一时期数学的主要成就有：

计算工具珠算算法的编撰，珠算盘在民间得到广泛应用；对古代数学著作的研究和加注；翻译了大量西方的数学著作等。

这一时期出现的数学家有吴敬、程大位、柯尚迁、顾应祥、周述学、徐光启、李之藻、薛凤祚、梅文鼎、梅谷成、王锡阐、方中通、陈世仁、年希尧等。

对西方数学传入中国有建树的外国人有：意大利人利玛窦，波兰人穆尼阁，英人伟烈亚力，德国人汤若望（1591~1666）等。

西方数学传入中国，正好补救我国古代数学的不足，理应激起我国数学的繁荣发展，但事实并非如此。当时我国知识界闭塞、固步自封，加以明清统治者只知巩固自己的皇权，不重视发展生产，更不注意培养人材，以至科学界后继无人，数学也处于低谷，这个历史教训是十分痛心的。

从清朝中叶（18世纪中叶）以后我国古代数学经过整理，走向转折①，出现一批数学家，如：

明安图（？~1765）著有《割圆密率捷法》；

焦　循（1763~1820）著有《乘方释例》；

汪　莱（1768~1813）著有《衡斋算学》；

李　锐（1773~1817）著有《方程新术草》；

项名达（1789~1850）著有《象数一原》。

20世纪以来，我国数学转入现代数学的研究，知名的数学家有：

熊庆来（1892~1969）研究：无穷、整函数及亚纯函数，在国际上称“熊氏无穷级”；

华罗庚（1910~1985）：研究“塔内问题”，国际上称华氏定理。他的研究成果有堆垒素数论、华林问题等，是世界上知名的数论权威。

江泽涵（1902~1994）．著名拓扑学家，在莫尔斯临界点理论、复迭空间、纤维丛、不动点理论的研究，国际上认为是最新成果。著有《不动点理论》（1979；英文版1989）；

陈省身（1911~　　）：1945年在美任教时，给出了高斯－邦尼公式新的内蕴证明。他对微分几何的贡献，带人了新纪元。

还有陈建功（1893~1971）、苏步青（1902~2003）。他们著述等身，桃李满门，也是著名的数学家。陈、苏在浙江大学的读书讨论班培养了一批数学苗子，如王元等。

新中国成立后，政府大力培养人材，出现了一批国际知名的数学家，如：

王元（1930~　　）：数论学家，科学院院士；

陈景润（1933~1996）：数论学家，1966年给出了哥德巴赫猜想“1+2”的证明，国际上誉为陈氏定理；

夏道行：国际上知名的函数论测度论专家，有以夏道行命名的函数、定理和

---

① 有人主张这是转折时期

不等式；

冯康：1965年首创有限元法，是当代世界计算数学与计算力学的重大成果；

陆启铿：双脚残疾的数学家，提出国际上知名的“陆启铿猜想”、“陆启铿域”。

限于篇幅，不能一一列举。

我国自古就是“数学王国”，在算术和代数方面领先世界，现在又在数论、拓扑、微分几何、测度论、有限元法等方面有新的贡献。展望未来，我们数学界必将有更新的成就。

4 微积分学发展简史

4.1 牛顿与莱布尼兹

从常量数学到变量数学时期，法国出了一位杰出的改革家笛卡尔。他于1629～1633年写成《宇宙论》，由于伽里略（Gelilai，1564～1642）提倡地动说而被教庭判罪，笛卡尔为避免争端，不敢出版。转而撰写《方法论》，其中的《几何学》被后世作为解析几何的起点，也是变量数学的起点。

笛卡尔的中心思想是要建立起一种普遍的数学，使算术、代数和几何统一起来，他从天文学和地理学的经纬度出发，把平面上的点和实数对（x，y）建立起对应关系，而创立了坐标的观念。他进一步考虑二元方程

$$F(x, y)=0$$

的性质，将方程和曲线建立了对应关系，从而把数和形统一起来。特别是他引入了变量，这是数学史上一项划时代的变革。恩格斯给了很高的评价："数学中的转折是笛卡尔的变数，有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学；有了变数，微积分才成为可能。"

数学从运动的研究中引出了函数这个概念。当时并没有对函数下定义，认为是变量间的关系。伽里略最先引用函数这个词，格列哥里① （Gregory，1638～1675）给出的定义是："它是从一些其他的量经过一系列代数运算而得到的，或者经过任何其他可以想象到的运算而得到的。"我国清代李善蘭（1811～1882）与伟烈亚力（Wylie，1815～1887）合译《代数积拾级》一书中把 function 译成函数，并给出定义"凡此变数中函彼变数，则此为彼之函数"。

牛顿（Newton，英 1642～1727）和莱布尼兹（Leibniz，德，1646～1716）同时独立发明了微积分。

1665年牛顿才23岁，第一次提出"流数率"，他称连续变量为流动量，如 x、y、z，称这些流动量的导数为流动率（或流数），如 $\dot{x}$、$\dot{y}$、$\dot{z}$。

流数率的中心问题是：

（1）已知连续运动的路径，求给定时刻的速度，即微分法；

（2）已知运动的速度，求给定时间内经过的路程，即积分法，是前一问题的反问题。

---

① 格列哥里：《论圆和双曲线的求积》（1667）中载：除了五种代数运算以外，加上第六种运算，即趋于极限的运算。

1687年牛顿用几何的形式摘记在他的著作《自然哲学之数学原理》的"补题"中，介绍了流数率。他的《流数率方法和无穷级数》到1736年才出版问世。

1665年牛顿在剑桥大学毕业，当时伦敦鼠疫流行，他便到乡下开始了他在机械、数学和光学上的研究。发明了"引力的平方反比定律"、"微积分"和"白光是从紫到红各种颜色光混合而成的"。牛顿说："这些都是在两个鼠疫年中做的，那时正处在发现力最盛的时期。"

牛顿一心放在科学研究的事业上，科学上许多新问题不断地涌向他的脑海，不得到解决他决不罢休，以致终身未娶。

莱布尼兹是另一个微积分的创始人。他学识渊博，才智过人，一生勤奋好学，精通数学、物理、生物、历史、地质、机械、法律、神学、语言、外交，是个全面的通才。他要寻求一种可以获得知识和创造发明的普遍方法，他从方法论的角度发明了微积分。

1684年莱布尼兹发表了第一篇微分法论文：《一种求极大极小和切线的新方法》，它也适用于分式和无理量，以及这种新方法的奇妙类型的计算。这篇文章仅6页纸，却有着划时代的意义。那时牛顿的论文还未发表，他用的符号公式也很简便，导数记为 $\mathrm{d}x:\mathrm{d}y$，二级导数记为 $\mathrm{dd}x:\mathrm{d}y^2$，还有基本微分法则：

$$\mathrm{d}(ax) = a\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}(z-y+w+x) = \mathrm{d}z-\mathrm{d}y+\mathrm{d}w+\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}(xv) = x\mathrm{d}v+v\mathrm{d}x,$$

$$\int x\mathrm{d}y = xy-\int y\mathrm{d}x,$$

$$\cdots\cdots$$

1686年，他发表第一篇积分法论文。积分号"$\int$"因当时印刷术还很落后，而用"f"代替。莱布尼兹是历史上杰出的符号学者，他的书书写简便，很容易读，风靡全欧。

牛顿和莱布尼兹各自从不同的问题出发，获得了相同的结果，正如非欧几何[①]的出现一样，竟有罗巴契夫斯基（1792～1856）、J·鲍耶（J.Bolyai，1802～1860）和黎曼（Riemann，1826～1866）三种非欧几何，这是不足为奇的。但是1699年由瑞士人丢利埃（Duillier，1664～1753）引起争端，他认为是牛顿发明了微积分，而莱布尼兹是剽窃的，于是掀起了波澜。各自的信徒争论不休，持续了一百多年。

大陆派学者接受了莱布尼兹优越的符号表达式。由于伯努利家族（Bernoullies）、欧拉、达朗贝尔、拉格朗日、拉普拉斯等的发扬光大，微积分学（又称数

---

① 见5.5.

学分析 mathematical analysis）获得了很大的进展，硕果累累。而英国派学者，有些出于民族的偏见，因袭牛顿的符号表达式，故步自封，排斥大陆的成果，其进展就相应的落后了。用巴培治（Babbage，1792～1871）的话是“d 主义超过了点时代”①。

微积分问世后并不是一帆风顺的，当时哲学家贝克莱（1685～1753）认为“导数是不存在的”。因为在求

$$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$$

中，首先假定 x 的增量 Δx 不为零，以后又改变了假定，令 $\Delta x=0$，“这是什么逻辑”？

微积分的基础是极限论，当时极限的观点是比较模糊的，什么是极限，什么是无穷小，是说不清的。

荷兰哲学家尼文泰（1654～1718）否认高阶微分的存在，不赞成略去无穷小量，那时莱布尼兹也没作出有力的答复。

比萨大学教授格兰弟（Grandi，1671～1742）举出一个无穷级数

$$1-1+1-1+\cdots,$$

设它的和为 x，则

$$1-1+1-1+\cdots=1-(1-1+1-1+\cdots)=1-x,$$

于是
$$x=1-x,\quad \therefore x=\frac{1}{2}。$$

但是

$$1-1+1-1+\cdots=(1-1)+(1-1)+\cdots=0;$$

而
$$1-1+1-1+\cdots=1-(1-1)-(1-1)-\cdots=1。$$

“岂非
$$\frac{1}{2}=1=0?”$$

他认为这是“从虚无创造万有”。

可见当时对无穷级数是缺乏研究的。一个不知道收敛还是发散的无穷级数如何能设它的和为 x 呢？又怎么能随意添加括号呢？

这类问题说明当时微积分的基础还不完整，引起了数学家们进一步思考和探讨。

十七八世纪的数学，几乎全部是微积分学（或称数学分析），功劳最大的学者要首推伯努利家族（Bernoullis）、欧拉、拉格朗日等。

伯努利是瑞士的数学大家族，二百年来祖孙四代有十多位第一流数学家。尼古拉·伯努利是这个家族的创业人。他家的家风是：勤学苦练，讨论挑战，力争

---

① 莱布尼兹用 dx、dy，牛顿用 $\dot{x}$、$\dot{y}$.

上游，敢超前人。

他的大儿子雅各 I（Jacob，1654 ~ 1705）、二儿子约翰 I（Johann，1667 ~ 1748）做过牧师，经过商，自学数学，成为牛顿、莱布尼兹以后微积分学的奠基人。

雅各、约翰两兄弟和莱布尼兹、惠更斯（Huygens，1629 ~ 1695）通信，相互咨询、挑战。1694 年莱布尼兹解出微分方程

$$y' + P(x)\ y = Q(x)\quad ,$$

1695 年雅各提出解伯努利方程

$$y' + P(x)\ y = Q(x)\ y^n\quad 。$$

1696 年莱布尼兹利用代换

$$z = y^{1-n}$$

解伯努利方程，约翰给出了另一种解法，雅各给出分离变量法解法。约翰还解出了抛射体的微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - kv^n = my\quad ,$$

和恰当方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0\quad 。$$

在雅各、约翰、莱布尼兹、惠更斯、尼古拉Ⅲ和丹尼尔等的研究和书信往来中诞生了一门数学分支——微分方程，并把微积分推向新的更高的进程。

4.2 分析基础的奠定

17 世纪中叶微积分建立以后，用微积分解决了许多物理学、天文学、工程学未解决的问题，因而又促使微积分得到飞速地发展，18 世纪达到空前的高度。19 世纪初数学家转向分析基础的研究。

波尔察诺（Bolzara，1781 ~ 1848，捷克人）开始将严格的论证导入分析学。1816 年提出了级数收敛的概念，对无穷级数的探究，使格兰弟的错误得到了澄清，同时对变量、极限、连续的概念有较深入的理解。

法国理工大学教授柯西（Cauchy，1789 ~ 1857）的贡献遍及数学的各个分支。他的著作《分析教程》(1821)、《无穷小计算讲义》(1823)、《无穷小计算在几何中的应用》(1826)，具有划时代的价值，给出了分析学中一些基本概念的严格定义。如极限、连续、导数、微分、积分、无穷级数的和等。过去贝克莱、尼文泰的问题都得到冰释。柯西极限定义（$\varepsilon - \delta$ 方法）被称为极限概念算术化（arithmetization），把极限过程用不等式刻划，使无穷的运算化为一系列不等式的推导。

柯西定义：任给 $\varepsilon > 0$，不论怎么小，总存在一正整数 N，当 $n > N$ 时恒有

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

则称 a 是数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad 。$$

这个定义有四种形式包括 ε-δ 形式，这里是 ε-N 形式。在证明极限时，采用了一系列不等式的推导。

德国数学家代德金（Dedekind，1831～1916）于 1872 年用"分割"（Schnitt）定义无理数，自两千年前毕达哥拉斯发现不可通约量的存在，到这时才给出无理数的严格定义。代德金的著作《连续性与无理数》（1872）、《数的意义》（1888）建立了实数理论，为分析学奠定了逻辑基础。

另一德国数学家康托尔（Cantor，1845～1918）用有理基本序列（fundamentalraihe）来定义无理数（1872）。他还是集合论的创始人（1883）。海涅（Heine，1821～1881）提出有限覆盖定理，与代德金的分割理论是等价的，1895 年为波莱尔（Borel，1871～1956）所完善，在实变函数论中称海涅——波莱尔定理。

德国的魏尔斯特拉斯（Weierstrass，1815～1897）是一位中学教师出身自学成才的著名数学家。他用递增有界数列来定义无理数（1860）。过去认为连续函数只可能在个别点处不可微，他发现连续函数

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x) \quad ,$$

$$(0 < x < 1,\ ab > 1 + \frac{3}{2}\pi,\ b \text{ 是奇数})$$

处处不可微。

德国巴赫曼（Bachmann，1837～1920）1892 年提出区间套（intervalischachtelung，Nest of intervals）原理用来建立实数理论。

代德金的分割、康托尔—海涅基本序列、维尔斯特拉斯有界单调序列称为实数的三大派理论。它们竟于 1872 年同在德国出现。

柯西与维尔斯特拉斯的极限论，康托尔的集合论，代德金、康托尔、海涅、魏尔斯特拉斯、巴赫曼的实数理论，这三者奠定了数学分析的逻辑理论基础，结束了三百多年的混乱与疑虑。

4.3 微积分学的进一步发展

数学分析有时是微积分学的同义语，有时是微分学、积分学、微分方程、级数论、复变函数论、实变函数论、积分方程、变分法、泛函分析等学科的总称，也称分析数学。上面介绍了微积分与微分方程，本节要简略地介绍级数论、复变函数论与实变函数论。

4.3.1 级数论

英国数学家泰勒（Tayler，1685～1731）于1715年提出泰勒级数①

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\cdots 。$$

那时还没有收敛和发散的概念，因而出现了左式是否是右式的和的问题。

尼古拉Ⅱ（1687～1759）是老尼古拉的侄儿，在1712～1713年给莱布尼兹的信中讨论过无穷级数的收敛与发散问题，如当 $x>1$ 时，

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\cdots ,$$

$$(1-x)^{-\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}x+\frac{1\cdot4}{3\cdot6}x^2+\frac{1\cdot4\cdot7}{3\cdot6\cdot9}x^3+\cdots ,$$

右边两个级数都是发散的，左边并不是它的和。这个结论在当时是惊人的，于是又出现右边等号问题。

尼古拉Ⅱ在1742～1743年与欧拉的通信中指出

$$\frac{1}{1-x}\neq 1+x+x^2+\cdots ,$$

因为余项 $\frac{x^{n+1}}{1-x}$ 是丢掉了的。

法国数学家拉格朗日（Lagrange，1736～1813）认为如果一个函数能够展成幂级数，就可以用多项式来逼近，因为幂级数的部分和是多项式。1759年他证明了泰勒展开式。

苏格兰数学家马克劳林（Maclaurin，1698～1746）1742年提出马克劳林级数

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots 。$$

瑞士数学家欧拉（Euler，1707～1783）根据幂级数展开式得到

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots ,\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots ,\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots ,\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

提出欧拉公式

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x 。$$

富里埃（Fourier，1768～1830）是著名数学家和物理学家，有“第二个牛顿”的美称，开辟了一个数学分支——富里埃级数。1807年在他的著作《热的分析

① 泰勒级数的名称是后来为纪念泰勒而命名的。

理论》中认为任何函数都可以表成三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\quad 。\qquad (*)$$

容易验证

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x=0,\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x=0\quad ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\mathrm{d}x=0\quad ,\qquad (m\neq n)$$

$$\int_{\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\mathrm{d}x=0\quad ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\mathrm{d}x=\pi,\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\mathrm{d}x=\pi\quad 。$$

并导出欧拉—富里埃公式：

三角级数（*）在［$-\pi$，π］上一致收敛于和 f（x），且

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\quad ,\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\quad 。\qquad (n=1,2,\cdots)$$

所定的富里埃级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

在［$-\pi$，π］上收敛，且

当 x 为 $f(x)$ 的连续点时收敛于 $f(x)$；

当 x 为 f（x）的间断点时收敛于 $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$；

当 x 为区间的端点 $x=-\pi$ 或 $x=\pi$ 时收敛于 $\dfrac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]$。

4.3.2 复变函数论

函数论包括复变函数论与实变函数论。

1484 年法人舒开（Chuquet）解二次方程

$$4+x^2=3x$$

时得根

$$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{2\frac{1}{4}-4}\quad 。$$

他很惊奇，认为这不可能。1545年卡当（Cardano，1501～1576）在解方程

$$x^2-10x+40=0$$

时，得

$$x=5\pm\sqrt{-15}\ 。$$

他称负数的平方根是诡辩量，是虚构的。1637年笛卡尔在《几何学》中首次给出了虚数的名称。1777年欧拉在《微分公式》中首先使用

$$\mathrm{i}=\sqrt{-1}\ 。$$

1797年挪威末塞尔（Wessel，1745～1818）用+1表示正方向单位，用ε表示与之垂直且共原点的另一方向单位，并记

$$\sqrt{-1}=\epsilon,\ \cos v+\varepsilon\sin v$$

与现在复数平面的表示法一致。1806年阿工（Argand，1768～1822）用"模"表示向量 $a+\mathrm{i}b$ 的长度。高斯（Gauss，德，1777～1855）1831年用数偶（a，b）表示 $a+\mathrm{i}b$，以后称复数平面，或高斯平面。虚数总给人以虚幻之感。至高斯平面出现，虚数的几何表示，才帮助理解它的涵意。

复变函数的研究是从18世纪开始的。如果函数的自变量是复数

$$z=x+\mathrm{i}y \qquad (x,\ y\text{是实数}),$$

则函数

$$f(z)=P(x,y)+\mathrm{i}Q(x,y)$$

称为复变函数。

如果 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个例外点外，处处有导数，则 $f(z)$ 称为 D 内的解析函数。例外点称为奇点。复变函数论主要研究解析函数的性质。

1773年欧拉考虑复变函数的积分

$$\int f(z)\mathrm{d}z,\quad f(z)=P(x,y)+\mathrm{i}Q(x,y)\ 。$$

他获得 $f(z)$ 可微的必要条件：

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y},\qquad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}\ 。$$

达朗贝尔（D'alembert，1717～1783）早在1752年已得到这两个方程，现在称为达朗贝尔—欧拉方程。由于柯西与黎曼也独立使用过可微的必要条件，有些书又称为柯西—黎曼条件，简记为C—R条件。

拉普拉斯（Leplace，法，1749～1827）、欧拉和达朗贝尔的工作是复变函数的前驱。柯西、黎曼、魏尔斯特拉斯三大数学家作了奠基性的工作。

柯西在1825年讨论了定积分

$$\int_{x+\mathrm{i}y}^{X+\mathrm{i}Y} f(z)\mathrm{d}z\quad ,$$

1831 年推出了著名的柯西积分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-z}\mathrm{d}t \quad 。$$

其中 C 是区域 D 的边界，z 是 D 内任一点。他在这一基础上建立了复变微分与积分的系统理论。

黎曼（Riemann，1826 ~ 1866）是一位年青的分析学家和几何学家。1851 年发表了《复变函数论的基础》，引入黎曼曲面的重要概念，确立了复变函数的几何理论基础。1854 年提出将函数表示成三角级数，同年发表了另一篇开阔几何学新领域的黎曼几何。黎曼对保角映射、椭圆函数论、多周期函数、偏微分方程、数论等方面都作出了开创性的贡献。1859 年推出了黎曼 ζ 函数

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}, \quad z = x + \mathrm{i}y \quad ,$$

提出了黎曼猜想："$\zeta(z)$ 位于 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 之间的全部零点都在 $x = \frac{1}{2}$ 之上。" 后来希尔伯特（Hilbert，1862 ~ 1943）将它列于"希尔伯特 23 个问题"之中。可惜黎曼健康很差，去世时年仅 39 岁。

魏尔斯特拉斯的研究，以幂级数为工具，定义解析函数是可以展为幂级数的函数，围绕着奇点研究函数的性质。他在椭圆函数论方面也作出了重大的贡献。他的女学生柯瓦列夫斯卡娅（俄国人，1850 ~ 1891）将解析函数用于微分方程，推动了微分方程解析理论的发展。

在应用方面，俄国人儒可夫斯基（1847 ~ 1921）利用复变函数理论解决飞机翼的结构问题，在流体力学和航空学方面作出了贡献。

4.3.3 实变函数论

19 世纪以来，陆续发现某些奇特性质的函数，如

(1) 函数连续但处处不可微；

(2) 函数连续但不分段单调；

(3) 函数的有限导数并不黎曼可积；

(4) 可积函数列的极限是不可积函数；

(5) 连续函数必可积，具有什么性质的不连续函数也可积呢?

(6) 如果改变积分的定义，可积的条件又是什么?

(7) 连续函数未必处处可导，则可导的充要条件又是什么?

等等，这些问题促使数学家们深入思考。它们都成为实变函数论的研究内容。

积分论也是实变函数论的研究内容。荷兰人斯提捷（Stieltjes，1856 ~ 1894）推广了积分概念，提出斯提捷积分。

约当（Jordan，1838 ~ 1922）1893 年给出新的容度（Content）概念，用来讨

论积分。波莱尔（Borel，1871～1956）1898年改进密度的概念，称之为测度（measure）。法人勒贝格（Lebesque，1875～1941）1902年在《积分、长度、面积》中改进了波莱尔的测度理论，建立了勒贝格测度与勒贝格积分。

函数构造论也是实变函数论的研究内容。1885年魏尔斯特拉斯证明了连续函数必可表示为一致收敛的多项式级数。至此，连续函数必可解析地表达，必可用多项式来逼近。

本世纪初出现一个广阔的新领域——泛函分析（functional analysis）。它综合函数论、几何和代数的观点，研究无穷维向量空间上的函数、算子和极限理论。意大利的弗尔太拉（Volterra，1860～1940），法国人阿达玛（Hadamard，1865～1963），匈牙利人黎斯（Riesz，1880～1956），波兰人巴拿赫（Banach，1892～1945），苏联人克列茵、柯尔莫戈洛夫等都有重要的贡献。

5 历史上几个著名的数学问题

我们要了解数学，应该知道它的历史，其中有些内容，发人深省，兴趣盎然，可以激发学习自觉性，对启发思维，尤为有力。数学史对教师更是不言而喻了，学生最爱问这方面的问题，教师应该满足学生的求知欲望。

在数学发展的历史上出现了一些著名而重大的问题，如几何三大问题、平行公理问题、方程的代数解法问题、哥德巴赫猜想等等。它们具有经久不息的魅力，无数的聪明才智曾倾注在这类问题之中，这种理论的探讨和科学实践一样，推动了数学的发展。

5.1 三等分角

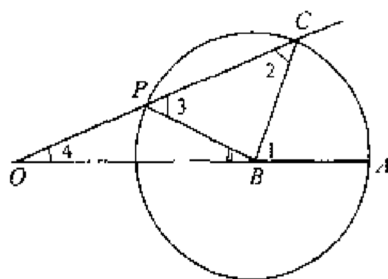


图 8

平面几何中解决了二等分角的作图后，自然要研究三等分角问题，那是距今两千多年前提出来的，那时没有量角器，对几何作图的概念也不明确（不知道尺规作图的概念）。科学家阿基米德（Archimides，前 287～212）曾作过尝试，当时认为根据不足，逻辑性不强，不能使人信服。他的作法是这样的：

在图 8 中设$\angle ABC$是要求三等分的角，在直尺上记一点 P，尺的一端为点 O，以 B 为圆心，OP 之长为半径作半圆交已知角的两边于A、C，使 O 点在A、B 的延长线上移动，P 点在圆周上移动，，当 P 过C时，联 OPC，由于

$$OP=PB=BC, \qquad \therefore \quad \angle BOC=\frac{1}{3}\angle ABC \quad 。$$

这个作法是不可能的，思维是混乱的。这代表阿基米德年代的数学水平。

欧几里得（Euclid，约前 330～275）将当时的几何知识整理成体系，先给出 5 条公设、5 个公理、35 个定义的概念，然后据以推理而成定理（13 卷中有 467 个定理），写成《几何原本》，5 条公设是：

（1）连两点可以作一直线；

（2）直线可以无限延长；

（3）以任意点为中心，用任意半径可作一圆；

（4）凡直角都相等；

(5) 两直线被另一直线所截，这两直线将在截线的同旁内角之和小于两直角的一侧相交（这第五公设又称平行公理）。

据此，几何作图就只能用不刻度的直尺和圆规，称为尺规作图。许多学者费了不少心思，认为三等分角问题不能用尺规作图解决。法国青年数学家伽罗瓦(Golois，1811～1832）作出了严格的证明。

复数出现以后，可以把已知角 A 的一边作为实轴，顶点作为原点，在复数平面上，角 A 的另一边上取距顶点距离为 1 的点 $a+bi$，则

$$a+b\mathrm{i}=\cos A+\mathrm{i}\sin A\text{。}$$

根据复数开立方的道理

$$\sqrt[3]{a+b\mathrm{i}}=\cos\frac{A}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{A}{3}$$

可知三等分角 A，即$\frac{A}{3}$，它是复数$\sqrt[3]{a+b\mathrm{i}}$的幅角，除了 A 是特别值（如 90°）外，在一般情形下是不能用尺规作出图来的。

5.2 二倍立方

设一个已知立方体的边长为 a，另一立方体的边长为 x，二倍立方问题就是解方程

$$x^3=2a^3\text{。}$$

它的解

$$x=\sqrt[3]{2}a$$

含有不尽立方根$\sqrt[3]{2}$，是不能用尺规作出的。

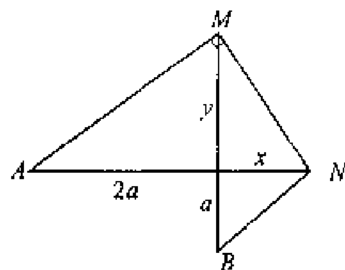


图 9

毕达哥拉斯学派的希波克拉底（Hippocrates，约460B.C.）曾用两个直角三角形（如图 9），AMN（M 为直角顶点），MNB（N 为直角顶点），依 $AN\perp BM$ “放置”，于是

$$x^2=ay\text{，}$$

$$y^2=2ax\text{。}$$

将第一式平方，$$x^4=a^2y^2\text{，}$$

y^2 用 $2ax$ 代入，$$x^4=2a^3x\text{，}$$

∴ $$x^3=2a^3\text{。}$$

但是这个所谓放置的作法，是不能用尺规完成的。

5.3 化圆为方

这个问题是方程

$$x^2 = \pi r^2$$

的解

$$x = \sqrt{\pi} r$$

能否用尺规作图呢?

公元前四百年希腊数学家希波克拉克曾设计将一个月牙形化为等积的三角形(如图10)。

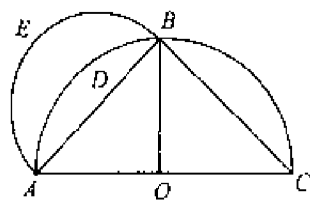


图10

设等腰直角△ABC内接于半圆ADBC(圆心为O),以AB为直径作半圆AEB,则

半圆ABC的面积:半圆AEB的面积 $= AC^2 : AB^2 = 2:1$

因此,扇形OADB的面积 = 半圆AEB的面积,两端去掉弓形ADB的面积,所以

月牙形的面积 = △AOB的面积。

既然月牙形可以化为等积的三角形,如此以往岂不是可以化圆为方了吗?"

但是,"如此以往",再走一步就不行了(数学上只有同理可证,没有如此以往的推理)。

历史上这个问题为难了很多数学家,主要是不理解π的超越性,误认为一个代数方程的根可由加减乘除开平方五种运算表示,实际上并非如此。这个理论到19世纪才由年轻的数学家伽罗瓦加以解决。后经埃尔密特(Aiemite,1822~1901)、康托尔(Cantor,1829~1920)、刘维尔(Liouville,1809~1882)、林德曼(Lindemann,1852~1939)等才明确π、自然对数的底e等都是超越数,它们都不能用加减乘除及开平方五种运算表出,也就不能用尺规作出图来。

什么是超越数呢?如果一个实数满足一个整数系数的代数方程,则这个实数称为代数数,实数中除代数数外,其余都是超越数。

例如,$-\frac{1}{2}$是代数数,因为它满足

$$2x + 1 = 0$$

$\sqrt[3]{2}$是代数数,因为它满足

$$x^3 - 2 = 0$$

超越数是存在的,刘维尔写出了一个无限不循环小数

$$\alpha = 0.110001000000000000000000100\cdots\cdots$$

他证明了α不可能满足任何整数系数方程,从而证明了它不是代数数,而是一个超越数,现在把α称为刘维尔数。

1873年法国数学家埃尔密特证明了自然对数底e的超越性。1882年德国数学家林德曼证明了π的超越性。

现在可以把实数系写成

$$\text{实数}\begin{cases}\text{代数数} & \begin{cases}\text{有理数}\ (2,\ -\frac{1}{2},\ \cdots)\\ \text{无理数}\ (\sqrt{2},\ \sqrt[3]{2},\ \cdots)\end{cases}\\ \text{超越数}\ (\pi,\ e,\ \lg 2,\ 3^{\sqrt{2}},\ \cdots) & \end{cases}$$

中学里没有讨论 π，$\lg 2$，$3^{\sqrt{2}}$这类数的超越性，因而没有引进代数数的概念。

5.4 分圆

分圆问题是将圆周分为 n 等分，它的解析意义是求解方程

$$z^n - 1 = 0 \quad ,$$

即
$$(z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1) = 0 \quad ,$$

它的复根记为 $a+bi$，如果实数 a，b 能由有限次加减乘除开平方 5 种运算表出，便可以用尺规作图。

根据高斯（Gauss，1772～1855）的研究，当 n 为

$$n = \begin{cases} 2^m & \text{形的偶数} \quad (\text{I}) \\ 2^{2^n} + 1 & \text{形的素数} \quad (\text{II}) \end{cases}$$

时以及由这两种数合成的非素数时，分圆问题是可作的。具体的说：

$n = 3 = 2^{2^0} + 1$	（Ⅱ）	3 等分圆可作；
$n = 4 = 2^2$	（Ⅰ）	4 等分圆可作；
$n = 5 = 2^{2^1} + 1$	（Ⅱ）	5 等分圆可作；
$n = 6 = 2 \times 3$	（Ⅰ、Ⅱ）	6 等分圆可作；
$n = 8 = 2^3$	（Ⅰ）	7 等分圆可作；
$n = 10 = 2 \times 5$	（Ⅰ、Ⅱ）	10 等分圆可作；
$n = 12 = 3 \times 4$	（Ⅰ、Ⅱ）	12 等分圆可作；
$n = 15 = 3 \times 5$	（Ⅰ、Ⅱ）	15 等分圆可作；
$n = 16 = 2^4$	（Ⅰ）	16 等分圆可作；
$n = 17 = 2^{2^2} + 1$	（Ⅱ）	17 等分圆可作

形如 2^{2^h}的数，称为费马数。根据费马（Fermat，1601～1665）的研究：

h	0	1	2	3	4
$2^{2^h}+1$	3	5	17	257	66537

3，5，17，257，66537 都是素数。但欧拉（Euler，1707～1783）证明当 $h=5$ 时，

$$2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \times 4700417$$

不是素数。

因此，当 $n \leqslant 17$ 时，$n=7$，9，11，13，14 时不能作圆，而作圆的有十种（$n=3$，4，5，6，8，10，12，15，16，17）。所以圆内接正多边形只有十种。

5.5 平行公理的研究与非欧几何

5.5.1 对平行公理的疑虑

欧氏《几何原本》中第五公设并非自明，很早就引起怀疑。这条公设的一种等价的叙述是“在平面上过直线外一点，只能作一条直线与它平行”，即所谓平行公理。从公元前3世纪到19世纪这两千多年来许多学者觉得平行公理不像其它公理那样不证自明，企图把它当作定理来证明。

利用平行公理可以推证“三角形的内角和等于180°”。

德国数学家斯韦卡特（Schweikart，1780~1859）在他的《星形几何》中说：“存在两类几何，欧氏几何和星形几何。在后一几何中三角形的内角和不等于两直角。”高斯提出的曲面几何中三角形内角和大于两直角。他们都是从平行公理的研究中出现了非欧几何的思想萌芽。

5.5.2 高斯、罗巴契夫斯基与J·鲍耶

1824年高斯给托里努斯的信透露了他于1816年研究了非欧几何。由于受康德唯心主义空间学说的压力（当时数学界认为现实空间只能是欧氏空间），高斯怕被别人扣上“愚人的叫喊”的帽子，没有发表他的研究成果。

俄国数学家罗巴契夫斯基（Lobacevskii，1792~1856）于1816年把几何命题按照是否依赖平行公理而划分为两部分。不依赖的部分称为绝对几何。他试图否定平行公理，在严格的推导下得到一连串的前后一贯的命题，它和绝对几何不相冲突。他把这种新的几何系统称为虚几何学（1929~1930年发表）。失明之后，他1840年出版了《平行理论的几何研究》，1855年又出版了《泛几何》，后人称为罗氏几何，称罗巴契夫斯基是几何学中的哥白尼。

第三个非欧几何的倡始人是匈牙利数学家J·鲍耶（Bolgai，Janos，1802~1860）。他的父亲F. 鲍耶（Bolyai，Farkas，1775~1856）是高斯的同学，也曾研究第五公设，但没有成果。1820年他写给儿子的信说：“希望你不要再作克服平行线理论的尝试，它会剥夺你一切余暇、健康、休息和所有的幸福。这个无希望的黑暗将吞噬成千个像牛顿那样的巨人。”18岁的J·鲍耶坚信自己的理想一定会胜利，不听教授父亲的劝告继续研究。终于发现了新的真理，在1823年给他父

亲的信中说："我已从乌有中创造另一个新奇的世界。"那时他才21岁，他关于非欧几何的论文只有24页。1832年发表在他父亲的著作中作为附录，这短短的24页使J·鲍耶名垂青史。

1832年高斯收到F·鲍耶寄来的《附录》，认为这青年有极高的天才，和自己四十年来所得的结果不谋而合。

在高斯、罗巴契夫斯基和J·鲍耶的非欧几何中有以下不同于欧氏几何的性质：

(1) 过直线 l 外一点 A，在含 l 与A的平面上，可以引无穷多条直线不和直线 l 相交，所有这些与 l 不相交的直线都在以 A 为顶点的 α 角内（也在它的对顶角内，图11)，这个角称为平行角，记为 π (p)，它随点 A 到直线 l 的距离 p 而增加。

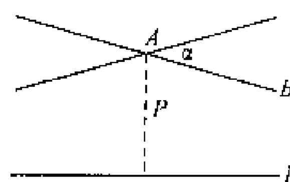


图11

(2) 三角形三内角之和小于两直角，从而直角减三角形内角和的差称为角欠(defect)，是三角形面积的函数。三角形的角欠与三角形的面积成比例。

n 边多边形的各内角和小于 ($2n-4$) 个直角，且此多边形的角欠与多边形面积成比例。

(3) 矩形不存在（设一四边形有三角为直角，则第四个内角是锐角)。

(4) 相似形不存在（全等形除外)。

5.5.3 **黎曼几何**

高斯、罗巴契夫斯基和J·鲍耶所代表的非欧思想体系称为第一种非欧几何。事过三十多年，德国数学家黎曼（Riemann，1826～1866）否定平行线的存在与直线的无限长，另设

(1) 凡直线皆相交；

(2) 直线虽为无界但有定长；

建立了第二种非欧几何，以后称为黎曼几何。

在黎曼几何中：

(1) 三角形内角和常大于二直角，从三角形内角和减二直角之差称为角余(*excess*)。三角形面积与角余成比例。

(2) 相似形不存在。

5.5.4 **非欧几何的影响**

非欧几何的革命思想为新的几何开辟了道路。许多几何理论都在改变和推广欧氏几何概念的基础之上。

1844年德国数学家格拉斯曼（Grassmann，1809～1877）把通常的解析几何坐

标推广到 n 个，建立 n 维仿射空间和度量空间的几何学。英国数学家凯莱（Gayley，1821～1895）1843 年导人 n 维空间的概念。随着爱因斯坦（Einstern，1879～1955）广义相对论的建立（1916），黎曼几何得到很大的发展，成为现代微分几何的基础。

德国数学家克莱茵（Klein，1849～1925）就各种几何学的发展作出总结，指出它们结构上的一般原则。他用变换群的观点作为几何分类的基础，几何学被看作是图形对某种变换群为不变性质的科学。1872 年他在德国厄尔朗根发表的演讲，被称为厄尔朗根纲领，对此后几何思想有着深远的影响。

由于非欧几何学者对公理体系的推敲，开始出现了几何基础这门新学科。它研究可以作为基础的概念和原则，分析公理系统的无矛盾性、完备性和独立性。1899 年希尔伯特（Hilbert，1862～1943）的《几何基础》用近代观点建立了欧几里得的几何公理体系。这是一部划时代的著作，给数学的公理化研究提供了典范。

5.6 方程的代数解法

实系数一元一次方程

$$ax + b = 0$$

和二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0$$

的根都可以用它的系数表出，称为有代数解法。三次、四次以及高次方程有没有代数解法呢？这个问题困惑了数学界好几百年。

公元 50 年海伦求满足

$$x^2 + 4x = 896$$

的根时，在方程两边加上 4 配成完全平方后开平方（这就是最早的配方法），当时认为是个奇迹。根据这个方法可求得

$$ax^2 + bx + c = 0$$

的根的公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}。$$

这个配方法对于三次方程就行不通了。另一个麻烦是如果没有虚数的概念，方程

$$x^2 + 1 = 0$$

被认为无解。

1484 年法国舒开（Nicolas Chuquet）解方程

$$x^2+4=3x$$

得根 $$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-4}\ ,$$

他认为这根是不可能的，他代表欧洲 15 世纪的数学水平。

5.6.1 虚数的出现

1545 年卡当（Cardano，1501～1576）首先研究了虚数，将方程

$$x^2-10x+40=0$$

的根 $5+\sqrt{-15}$写成 $5\tilde{P}P_x\tilde{m}15$（$\tilde{P}$代表加，$\tilde{m}$代表减，P_x 代表根号），是最早的虚数表示法。

1637 年笛卡尔给出了虚数的名称。1777 年欧拉首次使用

$$\mathrm{i}=\sqrt{-1},$$

i 是英文虚数 imaginnary 第一个字母。1806 年阿尔冈（Robert Argand，1768～1822）用模 r 表示向量 $a+b\mathrm{i}$ 的长度

$$r=\sqrt{a^2+b^2}\ 。$$

1831 年高斯把欧氏平面移植到复数平面，用数偶（a，b）表示 $a+b\mathrm{i}$，两复数的和与积都可以用纯代数的方程来定义。数系由实数系发展到复数系，才有可能研究方程的代数解法。

复数的几何解释使人能直观地理解它的真实意义，并可看成是一种平面的量而无虚幻之感。到 19 世纪中叶，经达朗贝尔（DAlembert，1717～1782）、欧拉、柯西（Canchy，1789～1857）、黎曼、维尔斯特拉斯（1815～1897）等的研究发展，成为数学的一个分支——复变函数论。

5.6.2 代数基本定理

15 世纪研究方程的代数解法还有一个思想障碍：由于不认识虚数，n 次方程有没有根？有多少个根？到 1742 年，欧拉才给出了代数基本定理："n 次方程有 n 个根。"

1746 年达朗贝尔给出了初步的证明。1749 年欧拉、1772 年拉格朗日（lagrange，1756～1813）都各自给过证明。高斯于 1797～1850 年给出了 4 个严格的证明。

在实际应用上往往只需求出实系数方程实根的近似值，因而方程的数值解法比理论的探讨还要先行一步。我国数学家秦九韶（1202～1261）于 1247 年给出的解法（秦九韶法），在世界上是领先的。

5.6.3 三次方程的代数解法

关于三次方程，在1494年西方数学家巴巧利（Pacioli）还宣称是不能解的，我国唐代王孝通在630年就能解数字系数三次方程。

1500年费罗（Ferro，1465~1526）解出了方程

$$x^3 + mx = n$$

类型的三次方程，但没有发表。1510年他秘传给菲俄（Fior，也叫佛罗里达斯Floridus），当时人们常把自己的发现保密，而向对手提出挑战。

1535年菲俄向当时以解题著称的塔塔格列亚（Tartaglia）挑战。两人各出30个三次方程要对方解答，其中包括

$$x^3 + mx = n$$

的类型，此外还有

$$x^3 + 9x^2 = 100 \qquad (x_1 = \sqrt{24} - 2),$$

$$x^3 + 3x^2 = 2 \qquad (x_1 = \sqrt{3} - 1),$$

$$x^3 + 4 = 5x^2 \qquad (x_1 = \sqrt{8} + 2),$$

$$x^3 + 6 = 7x^2 \qquad (x_1 = \sqrt{15} + 3),$$

等，在当时都是难题。相约1535年2月22日在米兰进行公开竞赛。塔塔格利亚大获全胜，这是四百多年前的数学竞赛。

塔塔格利亚原名尼可罗（Nicolo，Fantane，1499~1557），因脸部受伤引起口吃，塔塔格利亚是他的绰号，即“口吃”之意，他的绰号比本名反而更知名。他受竞赛的鼓励，立志探讨三次方程的代数解法。1541年他得到一般解法。他应米兰学者卡当的请求，把解法密传给卡当（Cardan，1501~1576）。1545年卡当写成《大术》在纽伦堡出版，后世把三次方程的求根公式称为卡当公式，塔塔格利亚之名反而湮没无闻。

三次方程的一般解法步骤如下：

将给定的实系数方程：

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

化为

$$x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0 \text{。}$$

作变换：令 $x = y + k$，使方程缺平方项，得：

$$y^3 + py + q = 0 \text{。}$$

作代换，令 $y = u + v$，得

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0,$$

即

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0 \text{。}$$

选择 u，v 使

$$3uv+p=0\ ,$$

即
$$uv=-\frac{p}{3}\ 。\qquad (1)$$

于是
$$u^3+v^3=-q\ 。\qquad (2)$$

将（1）式立方，与（2）式联立解出

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=A\text{（设）}\ ,$$

$$v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=B\text{（设）}\ 。$$

$$\therefore\quad u=\sqrt[3]{A},\ \omega\sqrt[3]{A},\ \omega^2\sqrt[3]{A}\ ,$$
$$v=\sqrt[3]{B},\ \omega\sqrt[3]{B},\ \omega^2\sqrt[3]{B}\ ,$$
$$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2},\ \omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\ 。$$

得三次方程根的公式：

$$y_1=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\ ,$$
$$y_2=\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B}\ ,$$
$$y_3=\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}\ 。$$

三次方程的不可约情形，即判别式

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$$

时三根都为实数，困惑了卡当。1572 年才由邦别利（Bombelli，1526～1572）解决。

5.6.4 四次方程的代数解法

1530 年中学教师科纳（Colla）提出一个问题：三数成等比数列，前两数的积是 6，三数的和是 10，求此三数。

令此三数为$\frac{6}{x}$，x，$\frac{x^3}{6}$，则

$$\frac{6}{x}+x+\frac{x^3}{6}=10,$$

导出四次方程

$$x^4+6x^2+60x+36=0\ 。$$

卡当的学生斐拉里（Ferrari，1522～1565）解出了这个问题。

四次方程的一般解法步骤如下：

将四次方程

$$a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

化为首系数为 1，且缺 x^3 项的方程

$$x^4+ax^2+bx+c=0 \quad。\tag{1}$$

用配方法加减 $ux^2+\frac{u^2}{4}$，u 为待定参数，得

$$\left(x^2+\frac{u}{2}\right)^2-\left[(u-a)\ x^2-bx+\left(\frac{u^2}{4}-c\right)\right]=0 \quad,\tag{2}$$

使［ ］内为完全平方以定参数 u，即须

$$b^2-4\ (u-a)\ \left(\frac{u^2}{4}-c\right)\ =0 \quad,$$

即

$$u^3-au^2-4cu+4ac-b^2=0 \quad。\tag{3}$$

解 u 的三次方程 (3)，得一实根 u_1，代入方程 (2)，可分解为两个二次方程

$$x^2+x\sqrt{u_1-a}+\left(\frac{u_1}{2}-\frac{b}{2\sqrt{u_1-a}}\right)\ =0 \quad,\tag{4}$$

$$x^2-x\sqrt{u_1-a}+\left(\frac{u_1}{2}+\frac{b}{2\sqrt{u_1-a}}\right)\ =0 \quad。\tag{5}$$

解 (4)、(5) 就得方程 (1) 的根。

(3)、(4)、(5) 三式称斐拉里公式。

笛卡尔提出用待定系数法来解 (1)。设

$$x^4+ax^2+bx+c\equiv\ (x^2+kx+l)\ (x^2-kx+m) \quad,$$

比较同类项系数，得

$$l+m-k^2=a \quad,$$

$$k\ (m-l)\ =b \quad,$$

$$lm=c \quad。$$

由前两个方程解出

$$2m=k^2+a+\frac{b}{k} \quad,$$

$$2l=k^2+a-\frac{b}{k} \quad。$$

代入第三个方程，得

$$k^6+2ak^4+\ (a^2-4c)\ k^2-b^2=0 \quad。$$

这是 k^2 的三次方程，可以证明“奇数方程至少有一实根，其符号与方程的常数项反号（首项系数为正）”，知该方程必有一正根，设 $k^2=k_1$，可算出 l，m，解

$$x^2+k_1x+l=0,\ x^2-k_1x+m=0 \quad,$$

就得到原四次方程 (1) 的根。

这个解法称为笛卡尔解法。

5.6.5 阿贝尔定理

16世纪随着三次、四次方程代数解法的解决之后，吸引着较多的数学家探讨五次方程的解法，经二百年都失败了。在失败中使人悟出它的不可解性。

1770～1771年拉格朗日证明了五次方程的预解式是六次方程。1799年鲁非尼（Ruffini，1765～1822）证明一般五次以上的方程不能用根式求解。1824年青年数学家阿贝尔（Abel，1802～1829）发表《论代数方程》，证明一般五次方程的不可解性，后人称为阿贝尔定理，结束了数学界二百多年的疑虑，开阔了近世代数方程论，并提出了群论这一分支和方程的超越函数解法（§1.8.12）。

5.7 费马猜想

费马是法国业余数学家，年近三十才自学数学，在数论、坐标几何、概率论等方面贡献很大，被誉为业余数学家之王。他在数论上的研究决定了这门学科的研究方向。他性情谦和，对著作无意发表，很多论述是他死后由朋友汇集成书的。

微分学中极值存在的必要条件"若$f(x)$在点x_0的邻域内可导且取极值，则$f'(x)=0$"就是费马提出的。

费马小定理是他1640年在给朋友的信中提出的："若p是质数，而a与p互质，则

$$a^p-a \vdots p\text{。}$$

"⋮"表示"能被整除于"，上式即同余式（$a^p \equiv a(\bmod p)$）

$$2^3-2 \vdots 3, 2^5-2 \vdots 5, 4^3-4 \vdots 3\text{。}$$

费马大定理（又称费马猜想）："方程

$$x^n+y^n=z^n$$

当$n>2$时不可能有整数解。"

这个猜想，费马在丢番图（Diophantus，246～330）问题①的旁边写道："然而此外，一个立方数不能分解为两个立方数之和，一个四次方数不能分解为两个四次方数之和，而一般说除平方以外的任何乘幂都不能分解为两个同次幂之和。我发现了这定理的一个真正奇妙的证明，但书上空白的地方太少，写不下。"遗憾的是费马的证明并未找到，只在费马给朋友Carcavi的信中说，他已用无穷下降法证明了$n=4$的情形，但是没有证明的细节。

① 把已知平方数分解为两个平方数之和，如$5^2=3^2+4^2$，$13^2=5^2+12^2$，…，$z^2=x^2+y^2$。

以后经许多大数学家如高斯、阿贝尔、哥西、库麦尔（Kummer，1810～1893）的努力，布鲁塞尔、巴黎科学院、格廷根皇家科学院设奖金悬赏多次，也没有结果。1770年欧拉证明了当 $n=3$ 时的情形。以后欧拉和莱布尼兹证明了当 $n=4$ 时的情形。勒让德（Liegendre，1752～1833）于1823年、狄利克雷（Dirihlet，1805～1859）于1825年证明了当 $n=5$ 时的情形。拉美（Lame，1795～1870）于1840年证明了当 $n=7$ 时的情形。1944年谢尔弗力基（Selfridge）、尼可（Nical）、凡第弗（Vandiver）证明了当 $n<4002$ 时的情形。1976年瓦格斯塔夫（Wagstaff）在计算机上证明了

$$2<n<125000$$

时没有正整数解。直到1994年才由英国数学家怀尔斯（Wiles，1953～ ）最后完成费马大定理的历史性证明。

5.8 哥德巴赫猜想

哥德巴赫（Goldbach，1690～1764）从以下的等式出发：

$$\begin{array}{lll} 4=2+2, & 6=3+3, & 8=3+5, \\ 10=5+5, & 12=5+7, & 14=7+7, \\ 16=3+13, & 18=5+13, & 20=7+13, \\ 22=3+19, & 24=5+19, & \cdots \end{array}$$

可以继续写下去，他认为：

（1）任何一个大于2的偶数都是两个素数的和；

（2）任何大于5的奇数都是三个素数之和（三素数定理），如

$$7=2+2+3,\ 9=3+3+3,\ 11=2+2+7,\ 13=3+5+5,\ \cdots$$

通常称（1）为哥德巴赫猜想，简记为“1+1”，（2）是（1）的推论。

1742年哥德巴赫把他的猜想写信问欧拉。欧拉认为这个设想是正确的，但他不能证明。

1922年英国数学家哈代（Hardy，1877～1947）与李特伍德（Littlewood，1885～1977）提出“圆法”。1937年苏联数学家维诺格拉多（Vinogradov）应用圆法与他创立的三角和估计法证明了猜想2（三素数定理）。我国数学家华罗庚证明了：对充分大的奇数 n 可表成

$$P_1+P_2+P_3{}^k$$

的形式，其中 P_1、P_2、P_3 表素数，k 表自然数，如

$$97=3+67+3^3 。$$

二百多年来世界的数学家投入了很大的精力来研究这个猜想，不断取得进展，请看下面的世界纪录：

年	数 学 家	纪 录
1742	比得堡哥德巴赫	提出"1+1"
1920	挪威布朗（F.Brun）	证明"9+9"
1924	德国拉马哈	证明"7+7
1932	英国埃斯特曼	证明"6+6"
1938	苏联布赫夕塔布	证明"5+5"
1940	苏联布赫夕塔布	证明"4+4"
1956	中国王元	证明"3+4"
1956	苏联维诺格拉陀夫	证明"3+3"
1957	中国王元	证明"2+3"
1962	中国潘承洞	证明"1+5"
1962	苏联巴尔巴恩	证明"1+5"
1963	中国潘承洞	证明"1+4"
1963	中国王元	证明"1+4"
1963	苏联巴尔巴恩	证明"1+4"
1965	苏联维诺格拉陀夫	证明"1+3"
1965	苏联布赫夕塔布	证明"1+3"
1965	意大利彭比尼	证明"1+3"
1966	中国陈景润	证明"1+2"

目前世界纪录的保持者是我国的陈景润。他对"筛法"作了重要的改进之后证明了"1+2"，即任何一个充分大的偶数，都可以表成两个数之和，其中一个是素数，另一个或者是素数，或者是两个素数的乘积，即

$$n = P_1 + \begin{cases} P_2 \\ P_2 \times P_3 \end{cases}$$

n 为充分大的偶数，P_i（$i=1$，2，3）为素数。世界上称之为"陈氏定理"，距"1+1"——"数学皇冠上的明珠"只有一步之遥了。

不少数学家简化了陈氏定理的证明。最简单的是由我国王元、丁夏畦和潘承洞共同作出的。

5.9 四色问题

有一个很风趣的传说：从前有个国王临终前写了一分遗嘱和一个密封的锦盒，遗嘱说把国土划分成五个区域，让五个王子各统治一个区域，要使每一区域

都与其他四区相邻，如果划分疆土有困难，可以打开锦盒，里面会指点该怎么做。

国王死后，五个王子为了划分国土，寻找贤才设计分区，怎么也画不出符合遗嘱要求的地图，只好打开锦盒，盒内不是地图，而是国王的亲笔遗书，嘱咐五个王子要团结，不要分裂，合则存，分则亡，遗嘱上要分的五个区域是画不出来的。

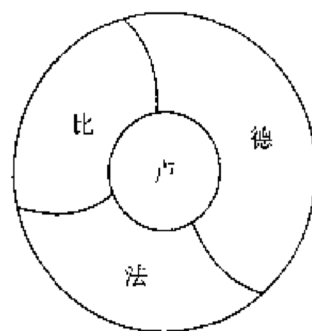


图 12

这个传说是真是假，姑且不予理论，实际上确有一个类似的问题。卢森堡被德国、法国、比利时三国包围（图 12），制地图着色时，没有四种不同颜色是分不清的，再复杂的地图是否只要四种颜色就够用呢？这就是著名的四色问题。

它最早是 1840 年德国拓扑学家麦比乌斯（Möbius，1790 ~ 1868）提出的，既是拓扑问题，也是图论问题。1852 年英国一个年轻的绘图员法人斯古特里在给英国地图着色时发现：如果两个相邻地区（指有一段共同边界）用不同颜色，只要四种颜色就够了。但他不懂得为什么。

数学家斯蒂捷（Stieltjes，1856 ~ 1894）设计了一个有趣的游戏，用于检验四色问题：游戏由甲乙二人参加，甲先画一个闭合曲线所围成的区域，乙填上颜色；甲再画一个相邻的区域，乙又填上另一种颜色；如此继续下去。无论甲怎么画，乙只要四种颜色，就足够把相邻的区域区别开来。

当时数学家摩根（De Morgan，1806 ~ 1871）、哈密尔顿（Hamilton，1805 ~ 1865）也研究过，但没有解决。1890 年 29 岁的数学家赫伍德证明了平面地图的着色最多用五种颜色就够了（所谓五色定理）。以后他在 60 年中发表了七篇论四色定理的文章，到 85 岁时还向伦敦数学学会送交了关于四色问题的论文。1976 年美国伊利诺夫学阿佩尔（Appel）和哈肯（Haken）用三台高速电子计算机运行了 1200 小时证明了四色定理，开阔了人与机器合作解决理论问题的途径。

5.10 希尔伯特问题

希尔伯特（Hilbert，1862 ~ 1943）是 20 世纪贡献最大、影响最深的数学家之一。他的研究方式是直攻重大具体问题，从中寻找带普通意义的理论与方法，开辟新的研究方向，从而跨越和影响了现代数学的广阔领域。他在 1900 年巴黎数学家大会上提出 23 个尚待解决的数学问题，被称为希尔伯特问题。

希尔伯特说：“历史告诉我们，科学的发展具有连续性，每个时代都有它自己的问题，后来或者得以解决，或者因为无所裨益而被抛到一边。如果想对最近

的将来的数学知识可能的发展有一个概念，那就必须回顾一下尚未解决的问题，同时检阅一下当今科学提出的、期望能够解决的问题。”“数学研究也需要自己的问题，正是通过这些问题的解决，研究者锻炼其钢铁意志和力量，发现新方法和新观点，使人闯入新的领域里去，达到更为广阔和自由的境界。”

前面提到的费马问题，被列为问题之一。1908 年德国保罗乌斯克提出在2007 年前谁能解决费马问题就奖他十万马克。美国大卫曼福特证明了方程

$$x^n + y^n = z^n$$

如果有整数解，那么这个整数是非常大，而且是非常少的。其数值之大将超过现有大型计算机的能力，这也列为问题之一。

黎曼猜想也是希尔伯特问题之一，至今没有人能证明它。

许多数论中的问题要等到这个问题解决以后才有可能。希尔伯特说：“将黎曼的素数公式彻底讨论清楚以后，也许我们就有能力去严格解决哥德巴赫问题了。”

所谓孪生素数问题，是指素数常常以两者相差 2 而成对出现，如

3，5；	11，13；	17，19；	29，31；	41，43；
71，73；	89，91；	101，103；	107，109；	137，139；
149，151；	…；	999999999959，999999999961；		…

这种相差 2 的素数对是否无穷多呢？

1849 年波林那克猜想相差 2 的素数对有无穷多，相差一个偶数的素数对也无穷多。

1938 年我国数学家华罗庚证明了“几乎全体偶整数都能表成两个素数之和”。或者说，任取一个偶数（2，4 除外），它能表示成两个素数之和的概率是 1，如

$$6=3+3,\quad 8=3+5,\quad 10=3+7,\quad 12=5+7,$$

$$14=3+11,\quad 16=3+13\quad 18=5+13,\quad \cdots,$$

$$100=11+89,\quad 200=61+139,\quad \cdots$$

关于希尔伯特 23 个问题研究的情况，根据《数学史译文集》（1981）略述如下。

(1) 连续统假设

推动发展的领域——公理化集合论。

1693 年美国 Cohen 在下述意义下证明了第一问题的不可解性，即：连续统假设的真伪不可能在 Zermelo - Fraenkel 公理系统内判明。

(2) 算术公理的相容性

推动发展的领域——数学基础。

希尔伯特证明算术公理相容性的设想，后来发展为系统的希尔伯特计划。数学相容性问题，至今尚未解决。

(3) 两等高等底的四面体之体积相等（几何基础）

1900 年由希尔伯特的学生 M，Dehn 给出肯定解答。

(4) 直线段作为两点间最短距离问题（几何基础）

许多数学家致力于构造和探讨各种特殊的度量几何在研究第四问题上取得很大进展，但问题并未完全解决。

(5) 不要定义群的函数的可微性假设的李群概念（几何基础）

1952 年由 Gleason，Montqomery，Zippin（美）最后解决，答案是肯定的。

(6) 物理公理的数学处理（数学物理）

在量子力学、热力学等部门公理化方法已获很大成功，但公理化的物理学意味着什么，仍是需要探讨的问题。至于概率论的公理化，1933 年已由苏联 K.A.H.K. 等建立。

(7) 某些数的无理性与超越性（超越数论）

1934 年苏联 A.O.Г 和德国 Schneider 解决了后半部分：对任意代数数 $\alpha \neq 0$，1 和任意代数无理数 $\beta \neq 0$ 证明了 α^{β} 的超越性。

(8) 素数问题（数论）

黎曼猜想至今仍是猜想。哥德巴赫猜想也未解决。我国数学家在这方面做了很出色的工作。

(9) 任意数域中最一般的互反律的证明（数域论）

已由高木贞治（日，1921）和 E.Artin（美，1927）解决。

(10) 丢番都方程可解性的证明（不定分析）

1970 年苏联 матпясевиу 在 Robinson，Davis，Putnun（美）的工作基础上证明了希尔伯特所期望的一般算法是不存在的。

(11) 系数为任意代数数的二次型（二次型理论）

Hasse（1929）和 Siegel（1936～1951）获得了重要结果。

(12) 阿贝尔域上的 KroneKer 定理推广到任意代数有理域（复乘法理论）

尚未解决。

(13) 不可能用只有两个变数的函数解一般的七次方程（方程论与实函数论）

连续函数情形于 1957 年由 АрнорЬА（苏）否定解决。如要求是解析函数，则问题仍未解决。

(14) 证明某类完全函数系的有限性（代数不变式理论）

1958 年永田雅宜（日）给出了否定解决，即证明了存在 Γ 群，其不变式所构成的环不具有有限个整基。

(15) Schubert 计数演算的严格基础（代数几何学）

Schubert 演算基础的纯代数处理已有可能。但 Schubert 演算的合理性仍待解决。代数几何的基础已由 Van der Waerden（1938～1940）与 Weil（1950）建立。

（16）代数曲线与曲面的拓扑（曲线与曲面的拓扑学，常微分方程的定性理论）

问题的前半部分，近年来不断有重要结果。对于后半部分，летровскии（苏）声称证明了 $n=2$ 时极限环的个数不超过 3，但这一结论是错误的，1979 年已由中国数学家举出反例。

（17）正定形的平方表示式（实域论）

1926 年已由 Artin（美）解决。

（18）由全等多面体构造空间（结晶体群理论）

问题第一部分于 1910 年由 Bieberbarch 肯定解决，第二部分由 Reinhardt（1928）和 Heesch（1935）分别给出三维和二维情形的例子。至于将无限个相等的给定形式的立体在空间中给以最紧密排列的问题，至今尚未完全解决。

（19）正则变分问题的解是否一定解析（椭圆型偏微分方程理论）

1904 年 Еернцтеин（苏）证明了一个两个变元的、解析的非线性椭圆方程，其解必定是解析的，后来又推广到多变元和椭圆组的情形。

（20）一般边值问题（椭圆型偏微分方程理论）

偏微分方程边值问题的研究正在蓬勃发展。

（21）具有给定单值群的线性微分方程的存在性（线性常微分方程大范围理论）

已由希尔伯特（1905）和 Rohrl（德，1957）解决。

（22）解析关系的单值化（黎曼曲面论）

一个变数的情形已由 Koebe（德，1907）等解决。

（23）变分法的进一步发展（变分法）

这 23 个问题已经解决的有 1、3、5、6、9、10、14、16、17、18、19、21、23 共 13 个；部分解决的有 2、4、7、8、11、13、15、20、23 共 9 个，只有 12 题尚未解决。20 世纪数学的成就是博大的、精深的。

希尔伯特和其他数学家对变分法的发展作出了重要的贡献。

这里把这些问题写出来，除供查考外是想说明两个问题：

第一，这类问题难度很大，要解决它需要有一定的基础，它也许是"钻牛角尖"，也许在将来被人们抛弃，但也许像布尔代数一样，在若干年后成为一门学科的基础，而在当时布尔（1815～1864）曾为之付出了很高的代价，却劳而无功。我们并不是像 F·鲍耶那样给青年人泼冷水，而是希望有像 J·鲍耶那样的有志之士，越是艰险越向前。总之，要博览群书，兼听则明，有一个清醒的头脑来认识和对待数学中的若干问题。现在还有人钻几何三大问题，也有人想发明永动

机，他们白白地浪费精力，主要由于看少了书，动错了脑筋。

第二，数学的源泉有前面提到的两个基本的方面，一是科学实践的需要，二是数学自身理论的需要。在欧洲文艺复兴的年代里，科学技术繁荣发达，提出了不少问题，要求数学予以解决。那时的数学家把物理、化学、天文、航海等科学作为载体，自己同时也是科学家，科学与数学融为一体，使科学插上了数学翅膀得以腾飞，数学自身也得到了空前迅速的发展。我们的祖国那时是明末清初，政治腐败，夜郎自大，失去了时机。目前科学技术又处在蓬勃发展的新时期，生物、医学、计算机科学、现代管理学、经济学等都需要数学为它们插上翅膀，有的科学还要求数学化，又是数学工作者选择载体的时期来到了，可以预期，数学必然要大显身手，必然会有更大的发展，我们不能再错过时机。

是否认为数学就没有自身理论的需要呢？显然不是，科学技术对数学的需求，与数学自身理论的需要，两者是互相促进，互相启发，甚至是合二为一的。没有实践就没有理论，没有理论也就没有更新更高的实践。布尔在一百多年前创立的理论，当时认为无用而受到冷遇，现在布尔代数是计算机科学不可缺少的工具；黎曼几何当时作为理论的需要而出现，以后爱因斯坦却把它应用到广义相对论；希尔伯特空间也是纯理论的产物，冯·诺伊曼于1930年把它应用到量子力学。重视理论研究与重视科学实践是研究数学的两大方向，也是两大源泉，都是不可忽视的，也是不可偏废的。

6 数学史上几次重大进展

6.1 从常量数学到变量数学

16世纪以前的数学主要是初等数学，内容包括算术、初等代数、初等几何和平面三角。它们都是以常量（不变的数量和固定的图形）为其研究的对象，因而称为常量数学。用常量数学可以描述事物和现象相对稳定的状态，但对于描述运动和变化，比如非匀速运动物体的轨迹，求曲线上任意点的切线，求变量的极值，求物体间的引力，求变化率等，就无能为力了。

变量数学产生于欧洲文艺复兴以后，它的标志是1637年解析几何和1665年微积分学的诞生。

有了变量数学，才有可能研究直线和圆以外的曲线，如行星的轨迹是椭圆，抛射物体的运动轨迹是抛物线；有了变量数学，才能描述和计算物体运动的瞬时速度、加速度、运动的路程，才有可能研究生物生长的繁殖率、衰减率、出生率、死亡率、渗透率、摄取率、催化率、感染率等。学过微积分和没学微积分是不一样的。现在美、日、德、英、法等国规定在高中要学习一元微积分，以提高高中毕业生解决实际问题与自学科学技术的能力，也为高等学校讲授物理、工程等提供方便。

变量数学给思想方法带来深刻的变化，导致函数论、级数论、微分方程论、微分几何、解析数论等分支的发展。通常把这类数学称为经典数学（Classical Mathematics）。

变量数学的产生还具有哲学意义。恩格斯在《自然辩证法》中写道：“数学中的转折点是笛卡尔的变数，有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学。”“在一切理论成就中，未必再有什么像17世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了”。

6.2 从必然数学到或然数学

所谓必然数学是指描述和研究现实世界的必然现象及其规律的数学，包括代数、几何、微积分、微分方程论、积分方程论、函数论等分支。但现实世界中还有大量的偶然现象（或随机现象），如投掷一枚硬币，不能预料它必然出现正面或者出现反面，这种情形是或然的（偶然的，或随机的）。为了研究随机现象及

其规律，产生了概率论、统计学、数理统计等一类的数学，称为统计数学（Statistical Mathematics）。

概率论的兴起有一段趣闻。有一个赌徒梅累（De Mere，1610～1685）向数学家帕斯卡（Pascal，1623～1662）提出一个问题："两个赌徒相约：赌若干局，谁先赢 s 局就算赢了。现在一人赢 a（$<s$）局，另一人赢 b（$<s$）局，赌博中止，问赌金应怎样分法才合理？"1654 年帕斯卡将他的解法写信寄给费马。当时荷兰数学家惠更斯（Hugens，1629～1695）听说这段故事，经过研究后把它写成《论赌博中的计算》一书，于 1657 年发表，这就是最早的概率论著作。

概率论初露头角，便遭到经典数学派某些人的非议、讽刺和反对。法国哲学家达来贝脱说："对于任何未来事件仅有两种可能的结果，一是成，二是败，故做每件事的机会都是$\frac{1}{2}$，这样概率就没有意义了。"这显然是错误的，试问"探囊取物"与"缘木求鱼"这两件事的概率都是 1/2 吗？

统计数学的出现，给科学研究提供了丰富的素材、方法和理论依据。现就这几个方面举例阐明。

例 1 每个医院都有病例资料档案，是为病人复诊备用的。有了统计数学，这些资料不仅只属于病者个人，起纵的作用，而且有横的作用，可用来研究某种疾病的统计资料，可从中得出许多规律、相关关系、经验公式以及预防医学的素材。

例 2 欧洲 17 世纪工商业迅速发展，激发了保险事业的兴起，一家人寿保险公司作了某地区存活与死亡人数的统计调查：

年龄	活到该年龄人数	在该年龄死亡人数
10	100000	749
15	96285	735
20	92637	723
25	89032	718
30	85441	720
40	78106	765
50	69804	962
60	57917	1546
70	38569	2391
80	14474	2091
90	847	385

从上表可知各年龄的死亡率（即概率）：

40：　765/78106 = 0.0097943；

50：　962/69804 = 0.0137814；

60：　1546/57917 = 0.0266933；

70：　2391/38569 = 0.0619927；

80：　2091/14474 = 0.1444659；

90：　385/847 = 0.4545454。

有了这个基本资料，保险公司就找到了本公司业务评估的方法。如 60 岁有 100 人投保，每人收保险费 a 元，共收保险金 $100a$ 元，预期死亡人数

$$100 \times 0.0267 = 2.67(\text{人})$$

设死者家属可得保险金 b 元，应付保险金$2.67b$ 元，于是公司可收入

$$100a - 2.67b(\text{元})\ ,$$

为了效益，最后可定 a，b 的数值。

前面提到的孟德尔遗传律，当时并未受到重视，在埋没了 35 年之后，才被数学家利用概率理论加以证明，从前科学上升为科学真理。

统计数学在科学技术、工农业、国防、医疗、经济、社会等部门得到广泛的应用，特别是在电子技术、自动控制、气象预报、地质勘探、企业管理、公共事业、社会保险等方面已取得明显的社会效益，其前景是不可限量的。

6.3　从明晰数学到模糊数学

在现实世界中事物之间的关系有些是确定的，有些则是不确定的。不确定中又有随机的和模糊的。事物的精确性、随机性和模糊性这三者是普遍存在的。为了反映它们的数量关系，于是出现三种数学：经典数学、统计数学和模糊数学（Fuzzy Mathematics）。模糊数学是 1965 年由美国控制论专家扎德（L.A.Zadeh）创立的。

在经典数学里，对一个概念必须给出明确的定义，例如平行四边形定义为两组对边平行的四边形。但是，不是所有的概念都能做到如此明确定义的，比如“高个子”，它是人的高度 $h \geqslant h_0$ 的集合的总称，而 h_0 是多少？1 米 75 还是 1 米 78，它的界限是模糊的，很难有精确的标准，因此不能用经典数学来描述或定义一个模糊概念。

经典数学的基础可归为集合论，一个元素 x 是否属于集合 A 是明确的，即

$$x \in A \quad 或 \quad x \notin A$$

二者必居其一，且只居其一，是不能含糊的，它的逻辑基础是二值逻辑。

这里介绍一个故事，叙述罗素（Russell，1872～1970）是怎样用悖论的形式来揭露经典数学及其逻辑不能解决所有的问题。

德国经典数学家策墨罗（Zermelo，1871～1953）认为集合

$$X = \{x \mid p(x)\},$$

$p(x)$ 是元素 x 的属性，对于任意 x，$p(x)$ 与 $\overline{p(x)}$ 有一成立且只有一成立，是无隙可乘的。罗素提出著名的"罗素悖论"加以非议，以子之矛攻子之盾。他的论点是：

设

$$X = \{x \mid x \notin X\}$$

如果 $x \in X$，则 $x \notin X$（应符合集合的属性）；如果 $x \notin X$，则 $x \in X$（符合属性的元素，应在集合内），显然

$$x \in X \quad 与 \quad x \notin X$$

自相矛盾，从根本上否定了二值逻辑的普遍性，经典派只能瞠目结舌。

对于一个是非界限本来不清的概念，如果勉强用是非标准来作划分，必然导致悖论，比如把人划分为秃头与非秃头两类，实际上有似秃非秃的人存在，就导致了秃头悖论：

先约定只有 $n = n_0$ 根头发的人为秃头，当 $n > n_0$ 则非秃，挑战者问 $n = n_0 + 1$ 秃乎？也许认为这种约定不够合理，才一发之间耳，于是再约定：$n = n_0 + 1$ 亦秃。这就导致一切人都是秃头的悖论。

罗素悖论揭露了经典数学的局限，说明这一类命题不能用经典数学来描述，或者说不能用二值逻辑来作判断，实际上这类问题属于模糊的领域。

为了解决模糊领域中的问题，数学必须有所突破，有所前进，就必须抛弃二值逻辑，另找出路。于是数学在研究模糊领域中事物数学化的理论使命下，与新时代技术需求（如电子计算机要求能接受模糊指令，发挥机器的人工智能）的实践使命下，突破了精确领域与二值逻辑的双重"封锁线"，诞生了新的模糊数学。

1965 年扎德研究经典数学的基础集合论，从中发现可用特征函数

$$C_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

来描述元素 x 对集合 A 的隶属关系。对于某些事物，这种绝对化的划分是可行的，比如分类学中两个互相对立的类中，不容许既属于 A 又属于 $\overline{A}$；对于另一些事物，则是不可行的，比如秃头、高个子等，要找一个人为划分界限，则是不可能的。扎德把仅有两个元素的集合 $\{0, 1\}$ 改造为包括 0 到 1 的实数区

间 [0, 1], 构造一个新的隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)(\in[0,1])$ 来刻划元素 x 隶属于模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 的程度, 他定义 X 上的模糊子集

$$\underset{\sim}{A}=\left\{\frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)}{x} \mid x\in X\right\} 。$$

如果 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, $\underset{\sim}{A}$又可记为

$$\underset{\sim}{A}=\frac{\mu(x_1)}{x_1}+\frac{\mu(x_2)}{x_2}+\cdots+\frac{\mu(x_n)}{x_n} ,$$

从而创建了数学中一个崭新的分支——模糊数学。

模糊集的定义越出了经典数学的精确领域, 也越出了统计数学的随机领域, 使数学能在模糊领域中发挥它的作用。

按照上面定义, 可以表

$$[某生]=\frac{0.8}{德}+\frac{0.9}{智}+\frac{0.7}{体}+\frac{0.6}{美}+\frac{0.7}{劳};$$

$$[科研成果]=\frac{\mu_1}{创造性}+\frac{\mu_2}{学术意义}+\frac{\mu_3}{见识深度}+\frac{\mu_4}{技术水平}+\frac{\mu_5}{效益}+\frac{\mu_6}{研究周期与规模},$$

$$\mu_i\in[0,1], i=1,2,\cdots,6 。$$

模糊子集都可以用模糊向量表示。模糊向量和模糊矩阵还可以参予运算、推证出新的结论,容易在电子计算机上实现。

有人问:随机性与模糊性都是不确定的,它们有什么区别呢? 这实际上是探讨概率论与模糊数学的区别。

概率论中的事件是明确的,但事件发生与否则是不确定的。例如某腹痛病人可能是患阑尾炎,阑尾炎的概念是明确的,但某腹痛病人是否患阑尾炎则不一定,我们可以从大量病例中统计出腹痛病人患阑尾炎的概率。

模糊数学则不然,用隶属函数所刻划的对象,就是不确定的,而发生与否则是确定的。例如某病人缺钾,缺钾是确定的,不是随机的,但缺钾到什么程度,可由隶属函数来刻划。

6.4 从无生命数学到生物数学

数学上有所谓数学危机,第一次危机是指初等数学只能反映简单的数量关系而不能反映变化率,导致了解析几何与微积分的诞生。第二次危机是经典数学只能反映确定现象及其规律而不能反映随机现象和统计规律,导致概率论的诞生。第三次危机暴露了二值逻辑的局限与反映模糊现象的局限,导致了模糊数学的诞

生。第四次危机暴露了数学不能反映生命现象与人脑思维的规律，导致了生物数学的诞生。经典数学、统计数学、模糊数学与生物数学的出现，反映了数学发展的四个里程碑。

19世纪以前，数学与生物学很少联系，恩格斯在《自然辩证法》中说数学在生物学上的应用等于零。以后由于生物学已从定性研究，发展到定量研究，没有数学很难前进。而数学又面临第四次危机，提出了描述生物现象与思维规律的新课题，两相情愿，走到一起来了，于是诞生了一支新型的边缘学科——生物数学(Biomathematics)。

1901年皮尔逊创办生物统计学杂志，开创了统计数学在生物学上的应用研究。1924年洛克(Lotka)著《物理生物学原理》将数学物理方法引进生物学，1956年再版时改名《数学生物学原理》，把生命现象的研究转化为对数学模型的研究。

第一次世界大战时意大利生物学家D'Ancona发现亚得里亚海湾鱼群间的食物链问题——人吃鱼，食鱼动物吃大鱼，大鱼吃小鱼，构成一个循环消长的系统，请教数学家Volterra(1860~1940)。Volterra于1926年研究出描述捕食生态关系的数学模型。1931年又写成《生存竞争的数学原理》。这是第一本生物数学的专著。

由于数学对生物学的渗透，生物学的研究从定性的描述性水平，引向定量的精确的高水平。对生物学以及医学的发展起了巨大的影响。Roger Bacon的名言"数学是科学的大门和钥匙"再次得到证实。有人进一步说，当今世界有两门重要的基础科学：数学与生物学，它们的渗透与结合，是举足轻重的。生物数学的前景是不可限量的。

生物学有随机干扰性、多因素制约性、离散性、突变性、模糊性、非数值性等特点，这些特性妨碍着它与数学的结合。作为新型的生物数学正是突破这些"封锁线"才成长起来的。

数学在与其他科学的结合中发展了自己，使得自己羽毛丰满、方法多样、功能齐全、面目一新。数学中的概率统计方法，系统分析和网络分析法、布尔代数、离散数学和突变论、模糊数学、集合论、映射拓扑与图论等可分别克服以上五种困难。显然，过去的经典数学、概率统计、拓扑学，与新出现的图论、网络、系统分析、生存分析、离散数学、模糊数学、突变论等都是生物数学的基础和工具。生物数学称得上是泰山不让土壤，河海不择细流，可谓后来居上，集数学之大成了。

生物数学使用的方法很多，如数学物理方法、概率统计方法、统筹法、网络法、系统分析法、模糊化方法、图解法、曲线拟合法、概念拟合法、内蕴生物数学法、信号流图法、生存分析法、实验研究法等。为篇幅所限，举个例子以示梗概。

曲线拟合法的步骤大致如下：

(1)从实例入手，作观察实验，测得x,y的数据组；

(2)描散点图，连成一条平滑曲线，称为实际曲线；

(3)从理论上建立模型,根据实际曲线的关键特征(如有拐点、极值、渐近线等)指导修正模型;

(4) 从理论模型算出新的数据组,作散点图,画出理论曲线;

(5) 检验理论曲线与实际曲线吻合的程度(作图检验或统计检验);

(6) 确定理论模型或经验公式。

以上第三步是关键,根据实际曲线的情况,可按下表选择理论模型:

实 际 曲 线	理 论 模 型
一条直线	$y = ax + b$
曲线有起伏(↗↘)	$y = ax^2 + bx + c$ $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
曲线单调 单调较陡 单调较坦 单调有渐近线	$y = ax^n$ $y = ae^{bx}$ $y = a\ln x + b$ $y = \frac{a}{x}$
S 形有渐近线	$y = \frac{1}{a + be^{-x}}$ $y = k - \frac{1}{a + be^{-x}}$
S 形(柯西上型) S 型(柯西下型)	$y = \begin{cases} 1, & x \leqslant c \\ \frac{1}{1 + [a(x-c)]^{b}}, \quad (b > 0) & x > c \end{cases}$ $y = \begin{cases} 0, & x \leqslant c \\ \frac{1}{1 + [a(x-c)]^{-b}}, \quad (b > 0) & x > c \end{cases}$
递增有上界	$y = a - e^{-bt} \quad (b > 0)$ b 值大较陡,b 值小平坦

实例可参看作者所著《生物医学数学模型》§6.8(湖南科技出版社,1990)。

7 数学的分支

前面已经揭示了数学的四大主干:经典数学、统计数学、模糊数学和生物数学。学科的分支是指每一分支应具有其基本理论而又自成体系的学科。依照这个标准,数学大体上可分为以下分支。

7.1 代数学

代数学起源于算术,由于研究对象的扩大,代数学也由低级到高级,由初等代数发展到高等代数。

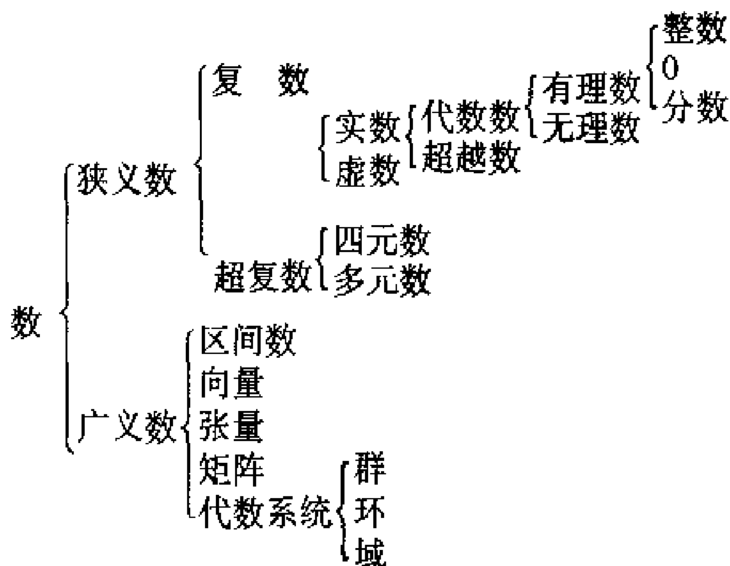
初等代数又称古典代数,就是现在中学里学的代数课程,是计算性的,限于研究以实数和复数为基础的复数系。将实数 a 和虚数 bi 合并起来构成的复数 $a+bi$,数的概念是否就完备了呢? 1843 年英国数学家哈密尔顿(Hamilton,1805 ~ 1865)提出了四元数

$$q = a + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

是由一个标量 a 和一个向量 $x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{k}$ 之和,a,x,y,z 都是实数,由四个单位 1,$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 构成四元数,可用来描述三维空间的旋转。它在数论、群论、圆锥曲面、二次曲面、刚体运动、数学物理方法、量子理论、相对论等方面都有重要的应用。

与四元数相应的还有多元数,它们构成超复数。我们把复数和超复数称为狭义数,它们都有相应的运算法则。

由于实践的需要,又出现了区间数、张量、矩阵等,还有带有某种运算的数的集合,称为代数系统,如群、环、域。我们把这些数称为广义数。狭义数与广义数构成数系:



高等代数是概念性的、公理化的，所讨论的对象已不是特定的实数和复数，而是非特定的任意元素集合的系统。这些集合系统规定了各自的合成法，就是集合系统的公理化。

高等代数引进了矩阵、向量、集、群、环、域、向量空间等基本概念。这些量具有和数相类似的运算的特点。

向量和集这两个概念，中学里曾经用过。行列式就是方阵，矩阵是将几行几列排成长方形的表。

群是从许多有代数运算的集合中总结出来的基本概念。群是这样定义的：假设对于任何非空集合 A 中的元素确定一个规则，在 A 中按一定顺序取出两个元素 a 和 b，另有一个元素 c 和它们对应，(这个对应规则称为运算)，且满足三个条件：

(1)元素对于这个运算(即乘法)满足结合律

$$a(bc)=(ab)c \quad ;$$

(2)有惟一的单位元素 e 存在，即

$$ae=ea=a, \quad be=eb=b \quad ;$$

(3)A 中每一元素都有逆元素，即

$$aa^{-1}=e, \quad bb^{-1}=e, \quad ee^{-1}=e \quad ,$$

这样的集合 A 称为对于所定义的运算来说，组成了一个群。

环是从集合的某些基本特性总结出来的概念。它的定义是：如果有一非空集，规定加法和乘法两个运算，满足五个条件：

(1)对加法运算满足结合律和交换律

$$(a+b)+c=a+(b+c), \quad a+b=b+a \quad ;$$

(2)对于乘法满足结合律

$$a(bc)=(ab)c \quad ;$$

(3)乘法对于加法满足分配律

$$a(b+c)=ab+ac \quad ;$$

(4)有零元素存在，即

$$a+0=a \quad ;$$

(5)有负元素存在，即

$$a+(-a)=0 \quad ,$$

这样的一个集合称为环。

域也称体，是一种特殊的环。它的定义是：如果 B 是一个交换环(即对乘法有交换律)，在 B 中至少含有一个不为 0 的元素 $a\neq 0$，a 元素还存在逆元素 a^{-1}，使 $aa^{-1}=1$，则这个交换环就称为域。

由数作元素组成的环称为数环，由数作元素组成的域称为数域。

向量空间也称线性空间。如果一个域的元素都是向量,向量之间有加法运算,又有数和向量的乘法运算,这两种运算都满足加法的交换律、结合律,满足加法和乘法的分配律;每个向量都有负向量;A 中还有零向量,则这个集合就称为向量空间。

线性代数是代数学的一个分支,用来求多元一次方程组的解,研究向量空间的结构、线性变换的标准形式和不变量,是近代数学的基础。

布尔代数是英国数学家布尔(Boole,1815~1864)于1847年创建的一门代数学分支,对逻辑规律进行了数学的分析,也称逻辑代数。后来在线路设计、自动化系统、电子计算机设计方面得到广泛应用,又称开关代数。

布尔代数有和“∪”、乘“·”、补“′”三种运算。设有一集合 R 有两个定元 0,1,称为布尔定元,变元 x,y,z 等,称布尔变元。如果对 R 中的任意元 x,y,z 满足:

交换律: $x\cup y=y\cup x,\quad x\cdot y=y\cdot x$;

结合律: $x\cup(y\cup z)=(x\cup y)\cup z$,

$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$;

分配律 $x\cup(y\cdot z)=(x\cup y)\cdot(x\cup z)$,

$x\cdot(y\cup z)=(x\cdot y)\cup(x\cdot z)$;

吸收律: $x\cup(x\cdot y)=x$,

$x\cdot(x\cup y)=x$;

0-1律: $x\cup 1=1,x\cdot 0=0$;

互补律: $x\cup x'=1,x\cdot x'=0$,

则集合 R 称为布尔集。布尔集、布尔定元和布尔运算构成布尔代数。布尔有生之年受到很多冷遇,一百年后誉满全球。

7.2 数论

德国著名数学家高斯(Gauss,1777~1855)有句名言:“数学是科学之王,数论是数学之王。”数论按研究方法可分初等数论、解析数论、代数数论和几何数论。

初等数论是用初等数学方法研究整数的整除性、数的进位法、不定方程、一次同余式理论等。我国古代在这方面曾有极其光辉的成就,如勾股数、中国剩余定理等。前面所论哥德巴赫猜想,也属数论范围,只是在理论证明上超过了初等数学方法。

解析数论是用数学分析作为工具解决数论问题,如华罗庚提出的三素数定理,可用分析的方法加以证明。

代数数论是用代数的方法解决数论问题,代数数论的基本概念是代数数(见§5.3 化圆为方),主要研究整数系数多项式的根。代数数论中的概念和方法对代

数学的发展有较大的影响。

几何数论研究的对象是直角坐标系中坐标都是整数的全部整点——空间格网。几何数论对于结晶学和物理学的研究颇为重要。

7.3 几何学

几何学是成熟最早的数学分支。几何学发展迅速，应用广泛，分支繁多。最古老的是我们熟悉的欧氏几何，后来又出现了解析几何、非欧几何、射影几何、微分几何、拓扑学、代数几何等。

欧氏几何的基础是三大支柱：

(1) 点、直线、平面、角、圆和三角形等不定义的概念(共35个)；

(2) 公设(5个)；

(3) 公理(5个)。

欧氏几何所研究的点、线、面、角、圆等都是不变动的。可以说欧氏几何是讨论图形在运动下的不变性质的学科。

解析几何是笛卡尔首先创立的。最大功绩是把运动引进了几何，把变数引进了数学，用代数方法处理几何问题，把方程和图象联系起来。开数学方法的先河，为微积分的创立开辟了道路。

欧拉通过坐标变换，把二元二次方程

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

所表示的二次曲线，归结为九种标准形状：

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$　　(椭圆)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$　　(虚椭圆)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$　　(二虚直线相交的实点)

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$　　(双曲线)

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$　　(二相交直线)

$y^2 - 2px = 0$　　(抛物线)

$x^2 - a^2 = 0$　　(二平行直线)

$x^2 + a^2 = 0$ （二平行虚直线）

$x^2 = 0$ （二重合直线）

空间二次曲面一般可用三元二次方程表示：

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

像二次曲线一样，可归结为 17 种标准形状：

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ （椭球面）

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ （虚椭球面）

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ （单叶双曲面）

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ （双叶双曲面）

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ （二阶锥面）

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ （虚二阶锥面）

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2cz = 0$ （椭圆抛物面）

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2cz = 0$ （双曲抛物面）

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ （椭圆柱面）

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ （虚椭圆柱面）

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ （双曲柱面）

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ （二相交平面）

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ （虚相交平面）

$y^2 - 2px = 0$ （抛物柱面）

$x^2 - a^2 = 0$　　　　（二平行平面）

$x^2 + a^2 = 0$　　　　（二平行虚平面）

$x^2 = 0$　　　　（二重合平面）

几何由于代数方法的参予，显示了它的重要地位。解析几何成为17世纪的"热门话题"。

非欧几何已在§5.5中有所论述，第一种非欧几何三角形三内角和小于两直角，第二种非欧几何则是三角形三内角和大于两直角。有人问："客观上是否存在这样的三角形呢？"在球面几何里，取赤道作底线，东经10°和东经100°的两条子午线作两边，这样构成的大三角形，它的内角和是270°大于两直角。如图14，两条子午线和赤道互相垂直，两子午线在北极相交，所成的夹角是

$$100° - 10° = 90°$$

这样的大三角形三个内角都是直角，所以球面几何学也是非欧几何的一种。

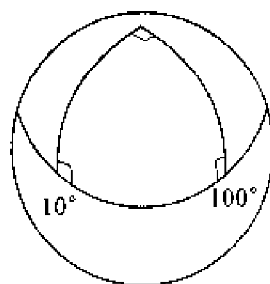


图14

微分几何是利用微分法研究曲线和曲面性质的学科。微分几何最先见于克莱罗（Clailuo，1713～1765）所著《关于双重曲率曲线的研究》（1731），蒙日（Monge，1746～1818）的《分析在几何学上的应用》（1809）中已包含了这一学科的雏型。欧拉研究了曲面的一般理论。高斯1827年在《关于曲面的研究》中奠定了曲面微分几何的基础。1887～1896年达布的《曲面一般理论的讲义》集曲线和曲面微分几何之大成。我国数学家陈省身（1911～）建立了代数拓扑和微分几何的联系，推进了整个微分几何的发展。

射影几何是17世纪的产物，比微分几何要早，笛沙格（Desargues，1591～1661）和帕斯（Pasch，1623～1662）是射影几何的创造者。当时不为人所注意。笛沙格导人了无穷远点、无穷远线。在无穷远处有公共点的直线叫平行线，将直线看作具有无穷大半径的圆，切线是割线的极限。讨论极点与极线、透射、透视，奠定了射影几何的基础。他发现的笛沙格定理（两三角形对应顶点联线如果共点，则对应边交点共线，其逆亦真）是射影几何的基本定理。笛沙格的思想，到19世纪才得到发扬。

帕斯卡16岁时发现了"帕斯卡六边形定理"（内接于二次曲线的六边形的三双对边的交点共线），并写成《圆锥曲线论》，1640年出版。从他的定理出发导出四百多条推论，还给出若干射影几何的定理。如："过一点的四直线，在一截线上所截取的线段的交比不变。"帕斯卡终生为病魔所缠，1658年某夜，牙痛不能入睡。他奋起工作，思索摆线的道理，竟使他忘却了痛苦，经八昼夜完成了《摆线论》的名著。

拓扑学是19世纪发展起来的另一几何学分支。欧拉曾考虑过"哥尼斯堡七桥

问题"和多面体公式

$$F + V = E + 2$$

(F 面数,V 顶数,E 棱数),都是拓扑学的先声,拓扑学最早论著是德国数学家里斯丁(Listing,1808~1882)的《拓扑学初步》,英文 Topology 是地形地势的意思,拓扑是它的译音,过去曾译为形势几何学。连续几何学、拓扑学是研究拓扑性质的几何分支。所谓拓扑性质是几何图形在一对一的双方连续变换下不变的性质。对拓扑学有贡献的数学家有美国英尔斯(Morse,1892~1977)、怀特尼(1907~)、德国数学家豪斯道夫(Hausdorff,1868~1942)、我国数学家江泽涵、陈省身、姜伯驹、石根华等。

这里补述对拓扑变换的通俗解释。假想在一块橡皮上面画一个圆,叫做 A。将橡皮扭歪、拉伸、压缩,但不要拉断,也不要重叠。这时 A 已变成另一个图形 B,从 A 到 B 叫做橡皮变形。虽然 A、B 形状不同,但 A 上每一个点都变成 B 上的一个点,反之亦然,叫做一一对应。此外,A 上两个非常接近的点 a_1、a_2 变成 B 上两个点 b_1、b_2 也非常接近,反之亦然,叫做双方连续。一一对应而且双方连续的变换叫做拓扑变换。拓扑变换比橡皮变形包含更广,例如将一根环形的绳子剪开后打一个结,再将剪断的地方接起来,就是拓扑变换。但无论作怎样的橡皮变形,也不能由一个变成另一个。

7.4 数学分析

数学分析通常是指微分学和积分学,合称微积分学。研究微积分学,必然要涉及微分方程的解法。广义的数学分析还包括级数论、函数论、微分方程、积分方程、变分法、泛函分析等许多分支。

微积分学是研究函数的导数和积分的性质与应用的学科,是 17 世纪由牛顿(1642~1727)和莱布尼兹(1646~1716)创立的。17 世纪是数学与自然科学崭新结合的世纪,在数学发展史上具有重要的意义,具体表现在三件大事上。第一件是,伽里略实验数学方法的出现,实验数学方法的特征是在所研究的现象中,找出一些可以度量的因素,并用数学方法加以描述应用到这些量的变化规律中去。第二件事是笛卡尔的著作《方法谈》与《几何学》的发表。引进了运动的点的坐标概念,创立了解析几何。第一件事与第二件事促进了第三件事——微积分学的创立。

微积分学的创立使运算方法由初等数学方法进入了高等数学范畴,对物理学、工程学、天文学、航海学等自然科学有很大的促进,也促进了 18 世纪欧洲的工业革命。经过近二百年实践的需求,现在一些发达国家已将一元微积分作为高中数学内容。

7.5 函数论

函数论包括实变函数论、复变函数论、泛函分析等，是微积分学的进一步发展。

实变函数论的基础是点集论，是研究点所成的集合的性质的理论，如点集函数、序列、极限、连续性、可微性、可积性、积分变换、保角变换等。

以复数作自变量的函数称复变函数，复变函数论的内容包括单值解析函数理论、黎曼曲面理论、几何函数论、自守函数与模函数理论、广义解析函数理论等。

泛函分析是20世纪30年代作为数学许多分支的内容与方法的统一处理而形成的一门新的学科。它概括了变分法、微分方程、积分方程、实变函数论、函数逼近论、算子理论等，它的论证方法体现了数学方法内在的本质联系。

构成这一学科内容之一的变分法，起源于1697年约翰·伯努利(Bernoulli, Johann, 1667～1748)的"最速降线问题"：求一曲线，使质点在重力作用下，由定点 A 以初速度沿此曲线运动到定点 B，所需时间最短。当时引起许多数学家的注意，后来欧拉和拉格朗日发明这一问题的普遍解法，于是形成变分法这门学科。

7.6 微分方程

十七八世纪为了解决涉及到一些积分的物理问题，经惠更斯(Huygens, 1629～1695)、莱布尼兹、伯努利兄弟、牛顿等数学家的研究，逐渐引导到一个新的数学分支——微分方程。凡涉及到变化率的工程技术问题、飞行技术的稳定性、化学反应、细菌繁殖、神经刺激理论、生物医学工程等，都可借微分方程求解。

如果在一个微分方程出现的未知函数只含一个自变量，则这个方程就算常微分方程。它的基本理论主要是研究解在一点附近的存在性和唯一性、解的形式和与初值等参数的依赖关系等。它的一般形式是

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0 \quad 。$$

它的解 $y = y(x)$(或者是隐函数)，可以用

$$y = y(x), y' = y'(x), y'' = y''(x), \cdots, y^{(n)} = y^{(n)}(x) \quad ,$$

代入这个方程后，能使这个方程成为恒等式。

它的解 $y = y(x)$ 对应着平面上的一条曲线，称之为这个常微分方程的积分曲线。

如果在一个微分方程中出现多元函数，则这个方程称为偏微分方程，也称数学物理方程(因为它是在解决物理学、力学的问题中产生的)。具有两个自变量 x, y 的二阶线性偏微分方程的一般形式是

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g$$

a,b,c,d,e,f,g 是依赖于 x,y 但与 u 无关的函数，如果是常数，则称为二阶常系数线性偏微分方程，假设 $a^2+b^2+c^2 \neq 0$，如果

(1) $b^2-4ac>0$，则方程为双曲型；

(2) $b^2-4ac=0$，则方程为抛物型；

(3) $b^2-4ac<0$，则方程为椭圆型。

一般来说，描述声波、光波、电磁波的传播和弹性体的振动等现象可用双曲型偏微分方程；描述一个经历长时间以后渐趋稳定的自然现象可用椭圆型偏微分方程；描述热的传导、带粘性的流体运动等现象，可用抛物型偏微分方程。

偏微分方程的解有通解、特解、奇解之分。通解是包含任意独立函数的解，独立函数的个数就是方程的阶数；特解是通解中满足定解条件而选定的任意函数而得到的解；奇解是不能从通解中由特性选定任意函数而得到的解。

定解条件包括边界条件与初始条件。初始条件说明整个系统的初始状态。边界条件是用来表达系统的边界所受的物理或几何的约束。只是反映一种过程的共同特征，而与具体条件无关，这样的偏微分方程称为泛定方程。泛定方程与定解条件合起来称为定解问题，偏微分方程的通解不容易求得，主要是研究定解问题。

7.7 概率论与数理统计

概率论产生于17世纪中叶，肇始于对赌博的研究(见§6.2)。1663年出版卡当的《论赌博》中已计算了掷二颗或三颗骰子的点数。伯努利的《精度术》(1713)论述的“伯努利定理”是大数定律的最早形式。1718年出版《机会的学说》论述了“德莫瓦佛——拉普拉斯定理”，即中心极限定理的特殊情形。法国蒲丰(Buffon,1707-1788)在《或然算术试验》中导入“蒲丰问题”：将一根长 $2l$ 的针任意投在画有许多平行线的平面上，每两根平行线相距 $2a(a>l)$，可以证明针与任一直线相交的概率是

$$p = 2l/a\pi \quad 。$$

值得注意的是这里出现了超越数 π。

拉普拉斯在《权率的哲学探讨》中根据伦敦、彼得堡、柏林和全法国的统计资料，得出男婴的出生率为

$$22/43 = 51.16\% \quad ;$$

另一方面，用巴黎1745~1784年40年间的资料，得男婴出生率为

$$25/49 = 51.02\% \quad ,$$

、非偶合。他进一步调查，发现巴黎附近有抛弃男婴的习俗，经过修正以后，这个数值稳定地接近22/43。

可见，在纷纭杂乱的大量偶然现象的背后，隐藏着必然的规律。探索这些规律，并利用它来为人类服务，正是概率论和数理统计的任务。

19世纪研究概率论的卓越人物有高斯和泊松（Poisson，1781～1840）。高斯奠定了最小二乘法和误差论的基础。泊松推广了大数定律，引入了著名的泊松分布。还有俄国的切比雷夫（ЧеδЂщь，1821～1894）和马尔可夫（Mankol，1866～1922），马尔可夫导入了"马尔可夫链"。苏联的柯尔莫戈洛夫（Koiuolopol，1903～?）以勒贝格的测度论为基础，给出了概率论的公理体系。

数理统计的研究对象是自然界与生产中的大量现象。它用概率来研究其统计规律。这种方法的特征是通过部分材料，研究随机变量的分布函数和数字特征，来获得正确的规律性结论。

数理统计研究内容主要是估值问题和假设检验问题，包括抽样理论、参数估计、假设检验、实验设计、相关分析、统计判决函数等。

数理统计是数学的一支尖兵，已广泛的应用于物理、化学、气象、水文、地质、国防、医学、卫生等各个方面，成为国民经济中不可缺少的学科。

7.8 运筹学

运筹学是二次世界大战以来兴起的新学科，内容庞杂，应用广泛。主要分支有规划论、优选法、对策论、排队论、最优化方法等。

规划论主要研究物资调运、巡回路线、工人的调度、场地选择、合理下料、最大通过能力、机器的合理利用等线性规划与非线性规划等问题。

线性规划是求一组变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 使它满足约束不等式组：

$$(1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

并使目标函数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

达到最大值或最小值。

满足全部约束条件的解称可行解，使目标函数达到最大值或最小值的解称最优解。使目标函数达到最大的问题称最大问题，使目标函数达到最小的问题称最小问题。

对于约束不等式(1)可以用增加松驰变量(非负)改为约束等式

$$(2)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases}$$

如果约束不等式为$\geqslant$，在松弛变量前置负号也能改为等式。

线性规划问题也可用矩阵表示，(2)式可写成

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

或

$$\boldsymbol{AX} + \boldsymbol{X}_{弛} = \boldsymbol{B} \quad 。$$

这类问题的解法有图解法、单纯形法等。

让我们举一个实例说明它的解法。

某制药厂生产甲乙两种成药，每种所需原料、工时、利润以及它们的限制和要求如下表：

	原　料	工　时	利　润
甲 x_1 件	2	3	5
乙 x_2 件	5	2	7
限制条件	50	42	要求最大

这就是一个线性规划问题。它的约束条件是二元一次不等式组：

$$\begin{cases} 2x_2 + 5x_2 \leqslant 50 \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 42 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

要求目标函数

$$f(x_1, x_2) = 5x_1 + 7x_2$$

的最大值。

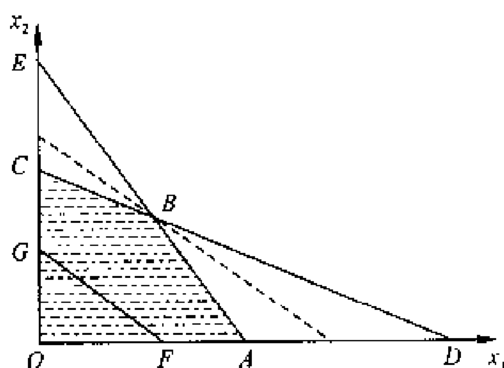


图 15

用图解法。利用平面解析几何知识，作三条直线段：

CD：　$2x_2 + 5x_2 = 50$

AE：　$3x_1 + 2x_2 = 42$

FG： $5x_1+7x_2=35$

如图 15，满足

$$2x_1+5x_2\leqslant 50$$

的点在 CD 的左下方；

满足

$$3x_1+2x_2\leqslant 42$$

的点在 AE 的左下方；CD 与 AE 相交于 B，交点坐标是(10,6)。因 $x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0$，所以满足本例的点限制在四边形 $OABC$ 内(包括边界)。

又用 $f(x_1,x_2)=5x_1+7x_2$ 表示利润，直线 FG：

$$5x_1+7x_2=35(\text{设})$$

上的点(x_1,x_2)表示生产甲药 x_1 件、乙药 x_2 件的利润为 35 元(35 是一个设想的利润，以便于作图，也可以画另条直线 $5x_1+7x_2=0$)。平行移动 FG，过 O 点表示利润最小，远离 O 点，利润逐渐上升，到达 B 点时利润最大，即

$$\max f(10,6)=92(\text{元})$$

即生产甲药 10 件、乙药 6 件可获最大利润 92 元。

本例也可用单纯形法来解，但较繁。

优选法就是寻求最好的方式来解决最优化问题。

线性规划的中心问题是使目标函数在约束条件下达到极值，或者说达到最优值。在科学实验和生产实践中为了选取合适的配方、选料和制作过程以达到高产、优质、低消耗、低成本的目的，在数学上采取优选化的方法，英文称 optimum seeking method，简记为 OSM。现在介绍两种常用的优选法——平分法和 0.618 法。

最简单的优选法是平分法。每作一次试验，根据试验结果可以决定下次试验的方向，可用平分法。平分法是在试验范围的中点安排试验，公式是

$$\text{中点}=\frac{1}{2}(a+b)\quad(a<b)\quad。$$

根据试验效果，如果下次试验应把数值取大一些，则把中点以下的一半试验范围划去；如果下次试验效果应把数值取小一些，则把中点以上的一半试验范围划去。这样试验一次，范围就缩小一半，继续试验下去，就可找到合适的最优值。

0.618 法是将平分法的中点改选成两个对称点，用试验决定哪一个是好点。

第一个试验点 x_1 选择在试验范围（a，b）的0.618 位置上，即

$$x_1=a+0.618\ (b-a)\qquad (a<b)$$

第二个试验 x_2 取区间内 x_1 的对称点，即

$$x_2=a+b-x_1$$

用 X_1 和 X_2 分别表示在 x_1 与 x_2 上的试验结果，如果 X_1 优于 X_2，则称 x_1 是好点（记+号），划去（a，x_2），保留（x_2，b）；如果 X_2 优于 X_1，则 x_2 是好

点，划去（x_1，b），保留（a，x_1）（图 16）：

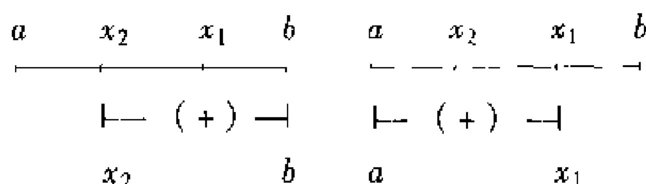


图 16

下一步，分两种情形讨论：如果 x_1 是好点，在（x_2，b）中找 x_1 的对称点 x_3：

$$x_3 = x_2 + b - x_1$$

如果 x_2 是好点，在（a，x_1）找 x_2 的对称点 x_3：

$$x_3 = a + x_1 - x_2 \quad ,$$

再考虑试验结果决定新的好点。

如此继续下去，直到找出最优点为止。

现在说明 0.618 这个数的来源。

当我们在（0，1）中先取一点 x_1 做试验，则

$$x_1 \approx 0.618 \quad （待证） \quad ;$$

$$x_2 = 1 - x_1 \quad 。$$

先做 x_1 点（假定点的位置不清楚）再做 x_2 点，如果 x_2 是好点，则沿坏点 x_1 剪去一段（x_1，1）保留（0，x_1），则范围缩小了，而好点不会丢掉。同样如果 x_1 是好点，则沿坏点 x_2 剪去一段（0，x_2）保留（x_2，1）。因此，x_1，x_2 是好点的可能性是相同的，即去掉（0，x_2）与去掉（x_1，1）的可能性是相同的，实际上这两段是相等的。

所以 x_2 在（0，x_1）中的位置与原来 x_1 在（0，1）的位置是一样的，即它们的值成比例：

$$x_2 : x_1 = x_1 : 1 \quad ,$$

即 $$x_2 = x_1^2 \quad 。$$

代入 $$x_2 = 1 - x_1 \quad ,$$

得 $$x_1^2 + x_1 - 1 = 0 \quad 。$$

求出正根

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) = 0.618033989\cdots \approx 0.618 \quad 。$$

回忆平面几何的黄金分割：长线段如果是短线段与全线段的比例中项，则这种分割称为黄金分割。

$$x^2 = 1 \cdot (1 - x) \quad ,$$

即

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad 。$$

它的正根约为 0.618。

对策论是从策略的观点研究竞赛活动中如何取胜的一门学科。我国春秋战国时有齐威王与他的侄子田忌赛马的故事，就是最古的对策论的例子。两人的马各有上中下三等，但每一等级的马都是齐王的好，相约比赛三次，每次各出三个等级中的一马，每一等级只参赛一次，胜者一次得千金。看来田忌处于劣势。田忌有一谋士孙膑（前 360 ~ 330）帮主人出了个主意：

次	齐 王	田 忌	胜 负
1	出上马	出下马	齐王胜
2	出中马	出上马	田忌胜
3	出下马	出中马	田忌胜

田忌两胜一负，赢得了千金。孙膑从此威名大震，他开了对策论的先河。

美国冯·诺依曼（Von Neumann，1903 ~ 1957）与摩根斯特恩合著了《对策论与经济行为》，从而诞生了一门新的学科——对策论。

对策论有几个基本的概念，即局中人、策略集、赢得函数。以齐王田忌赛马为例，这两个局中人的所有策略，可列如下表：

田忌策略 / 齐王赢得函数 / 齐王策略	B_1 上中下	B_2 上下中	B_3 中上下	B_4 中下上	B_5 下中上	B_6 下上中
A_1 上中下	3	1	1	1	1	-1
A_2 上下中	1	3	1	1	-1	1
A_3 中上下	1	-1	3	1	1	1
A_4 中下上	-1	1	1	3	1	1
A_5 下中上	1	1	-1	1	3	1
A_6 下上中	1	1	1	-1	1	3

齐王赢得函数矩阵是

$$
C_A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix},
$$

田忌赢得函数矩阵是

$$
C_B = -C_A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}。
$$

田忌的劣势是十分明显的，而孙膑在知彼知己洞察全局的情势下采取的策略是：

B_6（下上中） 对 A_1（上中下），

B_5（下中上） 对 A_2（上下中），

B_2（上下中） 对 A_3（中上下），

B_1（上中下） 对 A_4（中下上），

B_3（中上下） 对 A_5（下中上），

B_4（中下上） 对 A_6（下上中）。

这是田忌全部取胜的策略，可以说“知已知彼，百战不殆”。

排队论又称随机服务系统理论。排队现象是日常生活和工作中不可避免的，如打电话碰到占线，上餐馆遇到没有座位等等。排队论着重研究随机服务系统的最优化问题，也就是研究怎样改进系统的设计和控制，以提高系统的效率，取得最大的效益，来满足社会的需求。

最优化问题大量出现在工程技术、国防科学、社会科学以及工商贸易经济行为中。怎样在给定的条件下（有时必须突破这些条件的限制），充分利用现有的人力物力，使得完成某一项工作最快最省、质量最好，这都是最优化问题。

1948年约翰的文章《以不等式作附加条件的极值问题》的发表，把最优化问题提到了当今的课题。随之出现了质量控制、抽样检查、最优化方法等。1957

年在英国牛津成立了国际运筹学会（IFORS)。运筹学成为规划论、对策论、排队论、最优化方法等学科的统称。

7.9 数理逻辑

莱布尼兹最早提出用数学方法研究关于演绎推理问题。1847 年布尔发表《逻辑的数学分析》，用代数方法处理逻辑问题，创立了逻辑代数。德·摩尔根（De Moergan，1806～1871）的《形式逻辑》与施罗德（Schroder，1841～1902）的《逻辑代数讲义》研究了数理逻辑中两个基本组成部分——类演算和命题演算。弗雷格（Frege，1848～1925）在他的《数论的基础》中创立了数理逻辑的另一基本组成部分——谓词演算。1931 年奥地利数学家哥德尔（Godel，1906～1978）证明了谓词演算的完全性和算术系统的不完全性，使数理逻辑形成了一门独立的学科。

弗雷格的书中引人了逻辑量词∃和∀，给出了数理逻辑的形式公理系统。希尔伯特为了证明数学系统的公理的一致性，提出“元数学”，即以一个数学系统自身为对象，研究其逻辑结构和证明规律，称为证明论。经哥德尔等人的发展，证明论成为数理逻辑的重要分支，且构成了数学基础的分支，在证明论的研究中，还引出数理逻辑的另一分支——递归论。

20 世纪 40 年代，数理逻辑在开关线路、自动化系统、计算机设计等方面获得了应用。

7.10 计算数学

计算机数学成为一门学科，是从电子计算机问世后开始的。它的主要任务是对于科学、技术、经济、生产、生活中提出的数学问题，怎样运用计算机来解决，并相应地发展关于计算过程的基本理论。

计算数学可以分成两个方面：数值计算方法、程序设计和程序自动化。

数值计算方法，首先要将具体问题数学化，建立一个反映问题本质的数学模型，比如列出方程，提出定解条件，形成要求定解的数学问题。其次是制定计算方法，即数学问题的数值解法，特别是适应于电子计算机的数值解法，以及数值计算过程本身的规律性。

程序设计就是用机器指令来编写控制计算机工作步骤的程序单。计算机按照程序单上的指令进行操作，进行解题计算。为了提高解题准备工作的效率，主要采用程序标准化和程序自动化。

程序标准化，就是把计算过程，一次编好标准程序。程序自动化，就是把设

计工作尽可能交给计算机去做，让它建立算法语言系统和相应的编译程序，以后解题时，不再用机器指令写程序，而是用算法语言写程序。程序自动化使解题准备工作简易化，提高了计算工作的效率。

计算机进入数学领域，除了它自身的应用以外，还将改变数学的面貌，改变研究方向，也将改变对研究成果的评估，其前景是不可限量的。

7.11 图论

图论是50年代兴起的一个分支。它用线性代数作为工具，研究图的性质。在物理、化学、计算机科学、控制论、网络理论、经济管理等方面有广泛的应用。在生物学中有些非数值特性的事物数学化也常用图论来处理。

图论的起源要追溯到欧拉七桥问题。1736年欧拉（Euler，1707～1783）旅行到哥尼斯堡。这座美丽的城里有条普莱格尔河，河中有两个小岛，有7座桥把城市和小岛联结起来，如图17左。有人提出一个问题，能否一次不重复地走遍这七座桥呢？

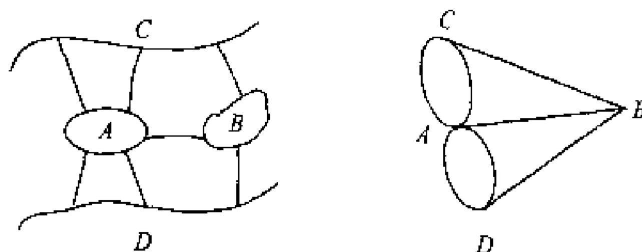


图17

欧拉将图17左转化为图17右进行研究，归结为“一笔画”问题，得出欧拉定理：

“凡能一笔画成的图形，其奇顶点的个数不能多于两个。”“一个图形如果只有一个奇顶点，此点不是所作路线的出发点，则此图形不能一笔画成，如果都是偶顶点，自然可以一笔画成。”

图17右中观察A点有5条边通过，5是奇数，称为奇顶点，一个正方形的任一项点都有2条线通过，2是偶数，称为偶顶点。正方形可以一笔画成，而图17有四个奇顶点，不能一笔画成。即一次不重复地走遍这七座桥是不可能的。

看来新建一个旅游区，为了游人的方便，还应考虑一笔画问题。

1856年汉米尔顿（Hamilton，1805～1865）提出的环球旅行问题，我国管梅谷提出的“中国邮递员”问题（要求邮路最省问题），也是图论的研究对象。

7.12 模糊数学

模糊数学是1965年由美科学家扎德创造的一门数学分支。1980年开始传人我国，近年来进展很快，内容包括模糊集理论、模糊集应用理论、模糊语言逻辑、模糊控制、模糊拓扑、模糊积分、模糊图论等。模糊数学诞生才三十多年，实际应用遍及气象、农林、生物、医学、环境、地质、石油、地理、化学、心理、语言、经济、教育、体育等领域。

模糊数学在理论体系上还很薄弱，它的生命力在于应用，从应用中求发展，在发展中完成公理化。数学分析从牛顿到希尔伯特，概率论从帕斯卡到康托尔都经历了二百余年才完成公理体系，对一个30岁的新兴学科急于求成是不现实的。模糊数学正经受数学分析、概率论初兴起时的指责，这些指责只能促进它在理论上的成长，其前景是灿烂辉煌的。

7.13 生物数学

生物数学是29世纪40年代的新兴学科，内容含生物统计学、生物信息论、生物控制论、生物系统学、生存分析、生物工程、数量遗传学、数理医药学、数量生态学、生长动力学、生物流体动力学、酶动力学、造血细胞动力学、分子生物数学、生物概率论等。

生物数学是一门年轻而富有生命力的学科，它不仅可以借数学模型以显示生物现象的本质，使生物学获得第二次生命，同时也使数学从非生命转到有生命，使数学获得第二次生命。

7.14 离散数学

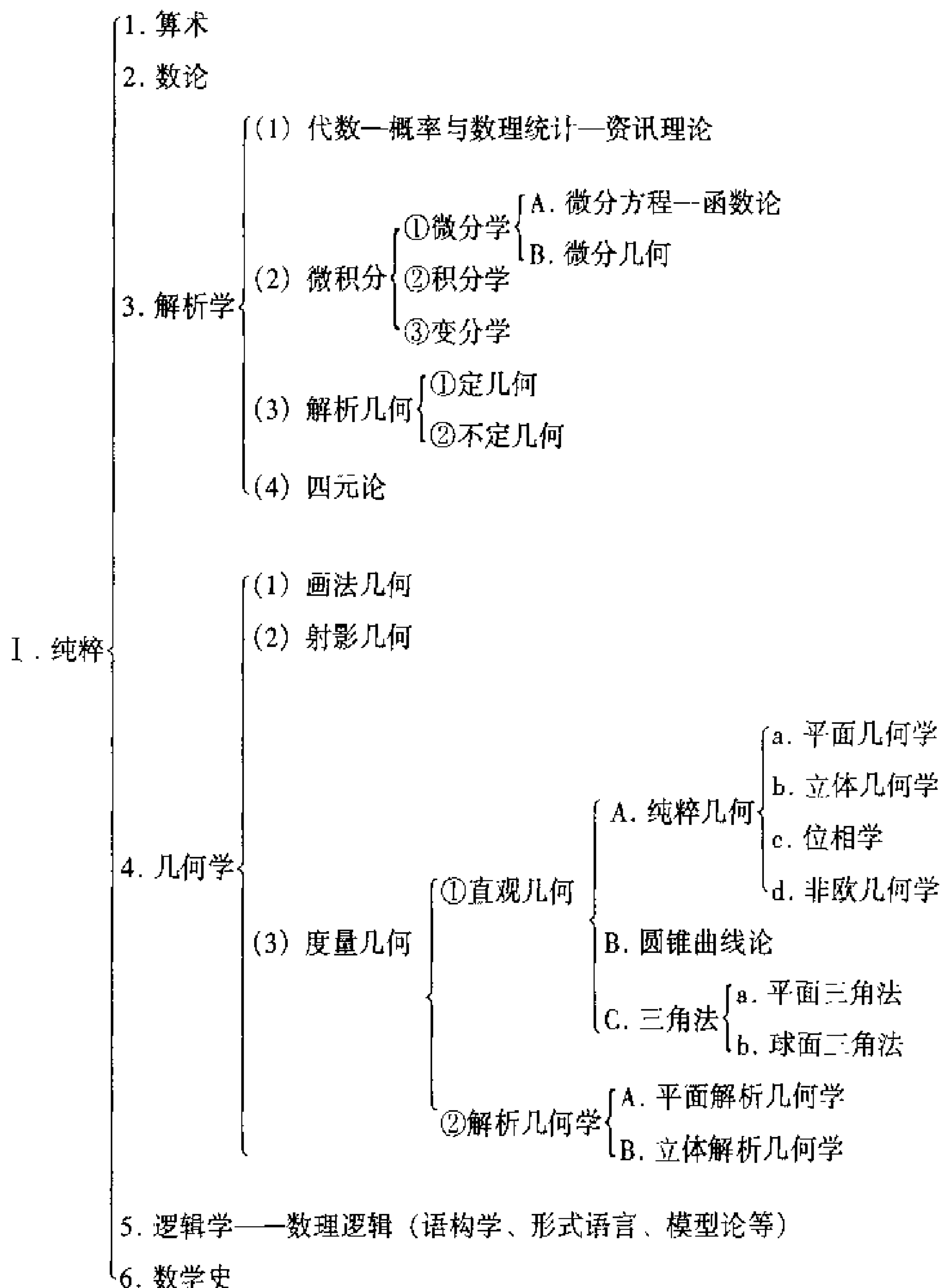
离散数学是本世纪70年代初期形成的，是以离散量的结构和相互关系以及计数构形等作为主要研究目标，其研究对象一般是有限个元素，内容包括数理逻辑初步、集合论、代数结构、布尔代数、图论、形成语言与自动机等。

本节不是数学的分类，其内容是允许重复的，也不是数学的全部。如信息论、控制论、数学史、非标准分析、突变论、组合数学、纯粹数学等都没有论及。

40年代以来数学取得了重大的进展，其特点是应用数学（包含模糊数学与生物数学）如雨后春笋，经典数学有较大的突破，计算数学的形成，因而有人主

张把近代数学划分为应用数学、经典数学与计算数学三类，上面的 14 项显然都分属于这三类之中。

《幼狮数学大辞典》把数学分为纯粹与应用两大类，下表可供参考。



Ⅱ. 应用

1. 天文学（天文物理）
2. 工程数学（微分方程及应用，偏微分方程解法，向量分析等）
3. 数值解析（计算图表，数值计算法，计算机等）
4. 应用力学（质点力学，刚体力学，流体力学，振动力学等）
5. 光学（几何光学，干涉与绕射等）
6. 应用物理
7. 商用数学（经济数学，计量经济等）
8. 军用数学（弹道学）
9. 数学规划（作业研究，线性规划，动态规划等）
10. 统计学（工程统计，生物统计等）
11. 电脑科学（离散数学，程式设计，组合数学等）
12. 测量学（大地测量、航空测量）
13、航海学

8 数学家轶事

在前面几节中我们看到数学的发展是与数学家分不开的。这里选择了数十位中外驰名的数学家作专题介绍，希望能从他们的数学成果、钻研精神、思维方法和处世态度各个方面吸取营养来激励我们后来的学者。选择的原则主要是知名度，或为我国数学作出了巨大的贡献，或在数学的发展史上功劳卓绝，或是数学教材上知名的作家。

8.1 中国数学家轶事

对于中国古代数学家，我们选集了祖冲之、沈括、秦九韶、李冶、朱世杰、郭守敬、徐光启、梅文鼎等。西算输入以后，选集了熊庆来、华罗庚、江泽涵、陈省身、陈景润、夏道行、冯康、陆启铿等。

1 祖冲之

我国南北朝动乱年代出了一位杰出的大数学家祖冲之(429～500)，他家是历史上有名的科学世家。祖父祖昌是刘宋王朝匠卿，主管土木修建工程。父亲祖朔之精通数学、历法。儿子祖暅是数学家、天文学家，首创祖暅公理。孙祖皓擅长历法。我国的祖冲之家族、梅文鼎家族与瑞士的伯努利家族是世界上罕见的数学世家。

祖冲之为国家谱写了两项世界记录，为后世留下了“坚持真理、不畏强暴、搜练古今、勇于实践”的精神。

在唐魏征等撰《隋书》里关于圆周率的记载有：“南徐州从事史祖冲之更开密法，以圆经一亿为一丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽；朒数(不足)三丈一尺四寸一分五厘九毫二妙六忽。正数在盈朒之间。密率：经一百一十三，圆周三百五十五。约率：圆经七，周二十二。……所著之书，名为缀术。学官莫能究其深奥，是故废而不理。”即§3.1所提出的：

正率：　$3.1415926<\pi<3.1415927$；

密率：　$\pi\doteq 355/113$；

约率：　$\pi\doteq 22/7$。

正率精确到小数八位，这一纪录保持了一千年。到1427年才被中亚细亚的阿尔卡西所超过。日本数学家三上义夫称

$$\pi=\frac{355}{113}$$

为祖率,是世界上首次发现的 π 的最佳分数。

魏晋以来通行的历法有重大错误,如冬至、夏至日差 1 天,太阳、月亮的方位往往要差 3 度;金、木、水、火、土五星的出没,有的要差 40 天。何承天(370 - 440)的《元嘉历》采用 19 年 7 闰的闰法,200 年要比实际多出 1 天。祖冲之决心改革旧的历法。他 30 多岁时编制的《大明历》①采用 391 年 144 闰的闰法。第一次将"岁差"(冬至点并非永久固定在一处,而是冬至所在,岁岁微差)引入历法,开辟了历法史上的新记录。

公元 462 年,南北朝时的宋朝发生了一场激烈的争论。祖冲之上表给宋孝武帝刘骏,建议改革历法,采用他编制的《大明历》。当时太子旅、贲中郎将戴法兴反对,认为古历不可更改。祖冲之指出:从元嘉十三年(436 年)到大明三年(459 年)间四次月食都和他预测的丝毫不差。而权臣戴法兴却说:羲和所在正时,取其万世不易也。如果改历,那天上不就乱了套吗?至于祖冲之的实际测量,指责为"非凡夫所测"。正如《南史》所说:"法兴为世祖(刘骏)所宠,天下畏其权,既立异议,论者皆附之。"《大明历》就这样打入了"冷宫"。直到戴法兴因贪污罪被赐死,梁武帝天监九年(510 年)在祖暅的推荐下《大明历》才得以施行,那时祖冲之已去世 10 年了。他"搜练古今,博采沈奥",坚持实践,刻苦钻研,不畏权势,勇于斗争的精神,永为后世景仰。

2 沈括

宋初沈括(1031 ~ 1095)是中国历史上伟大的科学家。《宋史》称他"博学善文,于天文、方志、律历、音乐、医药、卜算,无所不通,皆有所论著"。他既是数学家、天文学家,又是地质学家、物理学家。这样多才多艺的全面人才,不但数学史上少有,世界史上也是罕见的。他晚年(1086 ~ 1095)被贬,闲居润州(今江苏镇江)梦溪园,所著《梦溪笔谈》(1088)是一部对数学、历算、地质等科学有巨大价值和创新精神的著作。

在数学方面,他发明了隙积术和会圆术。

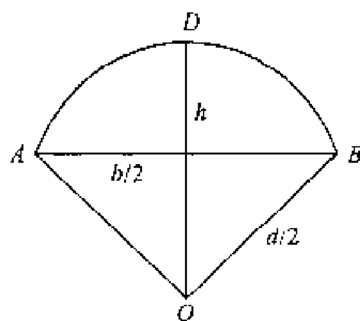
隙积术又称堆垛术或积弹法,是高阶等差数列求和的方法,是§3.1 中曾提到朱世杰的招差公式的最初形式。清代顾观光(1799 - 1862)说:"堆垛之术,详于杨(辉)氏、朱(世杰)氏二书,而创始之功,断推沈氏。"

会圆术是利用弧、弦、矢的关系以计算弓形弧的方法。沈括的公式是:

$$S=A\breve{D}B=\frac{2h^2}{d}+b\quad ,$$

① 大明是南北朝宋孝武帝刘骏的年号

$$b = AB = 2\sqrt{(\frac{d}{2})^2 - (\frac{d}{2} - h)^2}$$ 。



(图 18)

沈括是一位富有创新精神的思想家。在律历方面，他提出了很有创见的新历论——气历。

我国以农立国，过去使用阴历，以太阳的出没，一昼夜的时间为一日，以月亮绕地球转一周的时间为一月。满月叫望，见不到月光叫朔，所以阴历的月也叫朔望月。用十二个朔望月组成一年。地球公转蹁周的时间约为 365 天，而一个朔望月约为 29.5 天，十二个月约为 354 天，少 11 天多。为了弥补这个差数，每 19 年要加七个闰月，这样仍有差数，这个差数累积起来，使一年中二十四个节气的气候失常，所以阴历只能报时，不能报气候。

沈括认为这种历法不利耕种，非彻底改革不可。他亲身作了大量的天文观测，改进天文仪器，总结历代改历的经验教训，在他的科学著作《梦溪笔谈》里提出了一种新历法(气历)的理论。他主张废除朔望月，改以节气定月，大月三十一日，小月三十日，大小月相间，十二个月为一年，每年的立春作为一年的头一月，惊蛰起作为第二个月，清明起作为第三个月，以此类推。这样可以免除朔望月与四归年之间的参差，也就可以撤销置闰，而且月份同节气对应，有利于春耕夏种秋收冬藏，是一种比较彻底的阳历。

沈括的理论并没有受到重视。但他坚信"异时必有用余之说者"。果然 1852 年太平天国废除了清朝的"时宪历"，采用"天历"，也是以节气定月。九百年后英国的肖纳伯农历也是以节气定月的气历。

沈括在地质方面也有创见。1074 年他在浙江东北雁荡山察访中，发现山峰与别处不同，都座落在谷地当中，四面被山包围，因而在山的外面见不到山峰，一进入谷地，则山峰峭拔，直冲云霄。沈括分析这样奇特景观的原因是流水侵蚀作用，即在土质较为疏松的地段，流水将沙土冲走，使地面下切成山岭和深谷；在某些下切不均匀的河段形成瀑布；而渗入地下的水在汇集成地下水流时，有侵蚀作用可形成洞穴。18 世纪末英国人赫顿(1726～1797)在《地球的理论》中才阐述了流水侵蚀作用的学说，比沈括晚七百多年。

3 秦九韶

我国古典代数的中心是方程论。这方面的研究最早见于《九章算术》方程章(公元前 3 世纪)。祖冲之父子也研究过二次、三次方程的解法(5 世纪)。唐代王孝通解过三次方程(630 年)，刘益在《议古根源》中讨论过二次方程的数值解法(1080 年)，南宋伟大的数学家秦九韶(1202～1261)集当时研究之大成，写了一部划

英国霍纳在 1819 年提出了这种解法，但比秦九韶晚 572 年。他确定实根位置的定位法比日内瓦斯图谟(Sturm，1803－1855)早 582 年。

秦九韶，字道古，四川人，宋代周密在《癸辛杂识》中称他“性极机巧，星象音律算术以至营造等事，无不精究”。秦九韶自称“早岁侍案中都(南宋都城，今浙江杭州)，因得访习于太史。又尝从隐君子受数学”。1225－27 年随父在潼州(今四川三台县)为官。1236 年后，元军攻入四川，动乱年代他埋头钻研数学。1244 年在建康府(今江苏江宁)为官。后因母丧回四川，1247 年写成《数书九章》。他认为“夫物

在中国古算中经常运用，是我国古代几何学中面积体积理论的结晶。

4 李冶

李冶(1192～1279)原名李治，字仁卿，号敬斋，金元间真定栾城(今河北栾城县)人，是我国13世纪卓越的数学家。他和秦九韶、杨辉、朱世杰是宋元四大数学家，是天元术的创始人。

1230年李冶去洛阳应试，中进士，出任金朝钧州(今河南禹县)知事。1232年钧州被元兵攻占，他逃亡北方。1234年金亡，他隐居山西桐州，闭门专攻数学。1248年写成《测圆海镜》十二卷。1251年他在今河北元氏县封龙山，在"人所不能堪"的贫困环境下收徒讲学。1259年写成《益古演段》三卷(演段，等积交换之意)。

元世祖忽必烈多次以高官厚禄召他为官，他坚持不受。元耶律铸《送李敬斋行》以诗赞许："一代文章老，李车归故山，露浓山月净，荷老野塘寒。茅屋已知足，布衣甘分闲。世人学不得，须信古今难。"

李冶毕生研究数学，除天元术、高次方程解法、小数记法外，还总结了勾股容圆问题。在《测圆海镜》中提出了692条几何定理。其中有170个勾股容圆问题，包括求直角三角形内切圆、旁切圆的直径与勾股弦及其和差关系。《益古演段》大都是平面图形的面积关系和解决的方法，基本上是通过天元术和等积交换归结为解高次方程。他常用代数方法解几何问题，把几何与代数结合起来，使问题更加直观易解。在笛卡尔发明解析几何之前，这种思想方法在世界上也是首创的。

李冶一生著述甚多，除数学外，还有《敬斋今黈》四十卷，《泛说》四十卷，《文集》四十卷，《壁书丛削》十二卷。李冶是当时北方著名学者，与名流元裕、张德辉往来密切，号称"龙山三友"。

李冶对数学持唯物主义观点，认为数是客观存在，是可知的。他在《测圆海镜》自序中写道："数本难穷，吾欲以力强穷之，彼其数不惟不能得其凡，而吾之力且惫矣。然则数果不可以穷耶？既已名之数矣，则又何为而不可穷也！故谓数为难穷，斯可，谓数为不可穷，斯不可。何则，彼其冥冥之中，固有昭昭者存；夫昭昭者，其自然之数也，非自然之数，其自然之理也，数一出于自然，吾欲以力强穷之，使隶首复生，亦未如之何也已。苟能推自然之理，以明自然之数，则虽远而乾端坤倪，幽而神情鬼状，未有不合者矣。"

当时有轻视数学的思想，以为数学不过"九九贱技"，学数学是"玩物丧志"。他在《益古演段》自序中表示"术数虽居六艺之末，而施之人事，则最切务"，即使"其悯我者当百数，而笑我者当千数"，仍然要研究数学。其热爱数学之心，初则弃官，继则拒俗，高风亮节，令人景仰！

5 朱世杰

元代朱世杰，字汉卿，号松庭，与秦九韶、李冶、杨辉齐名，并称宋元四大数学家。家居燕山(今北京)，生卒年代不详。曾周游四方二十余年，学者踵至。为满足

学者要求，他编辑《算学启蒙》(1299)，后来一度失传，清嘉庆年间(1809)在朝鲜发现此书，才重刊问世。

朱世杰在教学时创四元术(多元高次联立方程组解法)。1303 年写成《四元玉鉴》，全书三卷，24 门，288 问。自《九章算术》提出多元一次联立方程组，千百年来没有进展，贾宪、秦九韶、李冶只着眼于一元高次方程，朱世杰《四元玉鉴》开始建立四元高次方程理论，在世界上领先四五百年。

6 郭守敬

郭守敬（1231～1316）字若思，邢台人，元代数学家、天文学家和水利专家。祖父郭荣，精通水利、数学，对郭守敬的影响很大。

元世祖忽必烈1262年召见郭守敬，郭面陈水利六事，颇得信任。忽必烈说："任事者如此人，不为素餐矣！"乃任命郭守敬与王恂（1236～1282）编制新历法，编成后称《授时历》(1280)。1281年颁行，一直用到明崇祯末年(1644)，是西法传入以前我国最后一种历法。

郭守敬主张历法应以实际观测为根据，他创制了13种天文仪器（1276）。过去使用黄道式仪器，郭守敬改用赤道式仪器，这种仪器，不仅可以直接测得天体的赤经、赤纬，还可以借助转仪钟对天体作跟踪观测。欧洲直到16世纪末才由丹麦天文学家第谷（1546～1601）改用赤道式仪器（1585）。郭守敬1276年的纪录比第谷要早309年。

郭守敬还设置了庞大的天文测量网，"东至高丽（朝鲜），西极滇池（昆明），南逾朱崖（海南岛），北尽铁勒（青海一带），四海测验，凡二十七所"，遍及全国。观测日月交食、昼夜长短、星辰位置，并证实了1199年南宋杨忠辅的《统天历》中所定一回归年为365.2425日是精密的。这个数值正是欧洲1582年格里历保持至今的精确数值。这项世界纪录应该是我国郭守敬保持的。

郭守敬制《授时历》时用招差术推算太阳逐日运行的速度和它在黄道上的经度，发现南北朝刘焯的二次内插法不够精密，乃创三次内差法，他称之为"平立定三差法"。

郭守敬认为从定冬至到定春分只有88.91日，这期间太阳运行了一个象限。他把88.91日分成6段，每段各为14.82日（$l=14.82$），观测0，l，$2l$，$3l$，$4l$，$5l$，$6l$各点上太阳的实际运行度数（称为积日），算出在0，l，$2l$，$3l$，$4l$，$5l$，$6l$各点上的"积差"，并计算积差的各级差如下表（表中Δ为一阶差，Δ^2为二阶差，Δ^3为三阶差，Δ^4为四阶差。如果Δ^3各项都相等，或Δ^4各项都为0，说明积差各项成三阶等差数列，所以称为平立定三差法：

	积 日	积 差	一差 Δ	二差 Δ^2	三差 Δ^3	四差 Δ^4
初段 (0)	0	0				
			7058.0250			
一段(l)	14.82	7058.0250		-1139.6580		
			5918.3670		-61.3548	
二段($2l$)	29.64	12976.3920		-1201.0128		0
			4717.3542		-61.3548	
三段($3l$)	44.46	17693.7462		-1262.3676		0
			3454.9866		-61.3548	
四段($4l$)	59.28	21148.7328		-1323.7224		0
			2131.2642		-61.3548	
五段($5l$)	74.10	23279.9970		-1385.0772		
			746.1870			
六段($6l$)	88.92	24026.1840				

因为表中三差都相等，可定积差是积日的三次函数。设

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

再用招差术确定它的系数。

郭守敬在数学上的成就除三次内插法外还有球面三角，都和天文计算密切相关。但过去历法的记载，大都语焉不详，使人莫测高深，无法知其来源，在记载中也不见三角函数。仅此一点可以作为当时未受外来影响的证据。

郭守敬成功的要诀就是一生谨慎，刻苦实践，做科学，创事业。没有这种精神就没有郭守敬。

7 徐光启、梅文鼎等

我国古代数学经过许多世纪的高涨之后，从14世纪中叶趋于停滞，朱世杰、郭守敬之后后继乏人。到16世纪末徐光启（1562～1633），李之藻（1566～1630）介绍西方科学，是中国卷入世界潮流的序曲，中国传统数学不完善的符号以及书写方式都有所改进，几乎改变了我国古代数学的面貌，使我们看到世界进步之迅速，也使我们懂得文化交流的重要性。

徐光启字子光，号玄扈，毕生致力于介绍西方科学，并重视总结我国的科学遗产，是我国近代科学的启蒙大师。他的学术思想和研究方向是值得人们敬仰和效法的。

徐光启，1631年著《测量全义》。西方的三角学与测量术开始输入我国。他晚年整理中国传统农业科学，编成闻名中外的《农政全书》。

1629年，明崇祯帝朱由俭命徐光启督修历法，并起用李之藻和通晓天文、数学的意大利人龙华氏（1559～1654）、瑞士人邓玉函（1576～1630）、德人汤若望（1591～1666）、意大利人罗雅谷（1593～1638）等同修历法。到1634年他们译成天文学参考书籍137卷，名《崇祯历书》，其中有球面三角法、西洋筹算、比例规等数学书二十卷。崇祯末年新历法编成后，因农民起义军攻入北京而未颁行（1645年清顺治帝以"依西洋新法"的时宪历书颁行）。

继徐光启之后，促使中西数学交流的人物，还有清代梅文鼎家族，是与祖冲之家族齐名的数学世家。

梅文鼎（1633～1721），安徽宣城人，29岁时从倪正学习《大统历算交食法》，以后便立志专攻数学。他学习勤奋，废寝忘食，积六十多年精力，著书七十多种。他将西洋新法消化理会，所著书籍，深入浅出。对清代数学研究颇有影响。流传下来的《梅氏历算丛书辑要》可谓冶中西数学于一炉，集古今中外之大成。

梅文鼎弟文鼐（nai）、文鼏（mi），子以燕（1654～1705），孙梅谷成（1681～1763）梅玕（gan）、梅成，曾孙梅钫，祖孙四代有七个数学家，可以与瑞士伯努利家族媲美。

梅谷成不亚乃祖，在研究《授时历草》、《测圆海镜》与《数理精蕴》的基础上，新著《赤水遗珍》（1761），将郭守敬、李冶的发明宏扬光大。在西学涌入之际，正确对待祖国遗产，梅谷成是功劳卓越的。

8 熊庆来

熊庆来（1893～1969），云南人，1911年考入云南省高等学堂，1913年赴比利时学习采矿，1915～1920年就读于法国格洛诺布大学、巴黎大学、蒙柏里大学，获理学硕士。1921年回国，任南京东南大学、清华大学教授。1931－1933年赴巴黎专攻函数论，获法国国家理学博士，回国后任教清华大学。抗日战争时期，任云南大学校长。

熊庆来在无穷级整函数与亚纯函数方面研究了无穷级亚纯函数。他定义的无穷级在国际上称为"熊氏无穷级"，为祖国争得了荣誉。他还证明了代里隆指出而未能证明的代数体函数第二基本定理，并结合导数将其推广。

熊庆来在清华大学任数学系主任时发现并培养了青年数学家华罗庚、张广厚、杨乐，是我国数学界的"伯乐"。

熊庆来任云南大学校长时，学校里送来了一筐枇杷，是校园的产物。熊校长要儿子抬回总务处，说损公肥私的例子决不能开。那时抗日战争，国难当头，他不坐小汽车，说"一滴油就是一滴血！"爱国、爱才、爱科学就是他的一切。

9 华罗庚

华罗庚（1910～1985），江苏金坛人，在国际上享有盛誉的数学家。19岁时

发表《苏家驹之代数的五次方程式不能成立的理由》，被熊庆来发现，感到震惊，把华罗庚接到清华大学来亲自指导培养。当时华罗庚只有初中水平，花四个月学英语，一年半读完数学系的课程，破格提升作教员，登上了大学的讲坛。

1936年熊庆来推荐华罗庚去英国剑桥大学深造。在两年多时间里，写出了《论高斯的完整三角和估计的问题》。等十几篇论文，其中关于“塔内问题”被誉为“华氏定理”，引起英国数学界的注意。他研究堆垒素数论、华林问题、哥德巴赫问题，在英、法、德、苏联、印度的杂志上发表了18篇论文，惊动世界。

抗日战争爆发，华罗庚毅然回国，在西南联大任教授。1941年完成名著《堆垒素数论》。1946年2~5月去苏联讲学，1946~1950年在美国讲学。任普林斯顿高级研究院研究员。被选为美国科学院外籍院士（1982）、第三世界科学院院士（1983）、德国巴伐利亚科学院院士（1985）。1948年当选为中央研究院院士。1950年华罗庚举家回国，筹建数学研究所，1952年任所长。

华罗庚是中国解析数论、典型群、矩阵几何学、自守函数论、多复变函数论的创始人与开拓者。他一生写了20部专著，200多篇论文，有8部在国外翻译出版，列入本世纪经典著作。1958年后从事应用数学研究，在全国推广优选法和统筹法，将数学理论应用于生产，取得了显著成果。1985年6月在日本东京大学作学术报告时因心脏病突发而去世。

为什么华罗庚能取得如此辉煌的成就呢？有人以为他是天才，其实他在儿童时代，极其好玩，不懂得学习的重要，也不知生活的艰辛，让父母伤尽了脑筋。他进入初中以后，遇到一位好老师王维克，耐心地帮助他，使他爱上了数学。华罗庚家贫，无力升学，王维克任校长后，让华罗庚当会计，能有时间自学数学

西南联合大学，江泽涵回国任数学系主任。1946年北京大学迁回北平，任北大理学院代院长。1947年赴瑞士苏黎世高等理工学院做研究工作。1949年北平和平解放，他克服重重困难回到祖国。

1927年与蒋守方结婚，蒋是美拉特格斯大学数学硕士，是江一生的得力助手。

江泽涵是著名的拓扑学家，在莫尔斯临界点理论、复迭空间、纤维丛与不动点理论等分支做出了重大贡献。不动点理论在国际上认为是最新成果，称为拓扑学的新学派代表。美国数学家R·布朗在其名著《莱夫谢茨不动点定理》中用两章介绍了江泽涵的研究成果。文化大革命期间，江泽涵在艰苦的情况下仍不断地做研究工作，1979年出版了《不动点类理论》，1989年科学出版社与德国斯普林格出版社联合出版了《不动点类理论》的英文版。江泽涵的学生姜伯驹、石根华在江的指导下作出了重大成绩，使我国不动点理论研究在国际上领先，出现了蓬勃发展的局面。

江泽涵发扬了北大老校长蔡元培倡导的“兼容并蓄”的作风，不立门户，不斥异己，团结多方专家，吸取百家之长，广聘海内外学者来北大讲学，如吴文俊、廖山涛、程民德、孙以丰等。他平易近人，谦虚谨慎，对学生既严格要求，又热情提携，常常帮助后进整理成果，推荐发表。他热爱祖国，认为要为中国人争气。他的事业在中国，在拓扑，在学生，不愧是熊庆来后的又一个“伯乐”。

11 陈省身

陈省身，1911年生于浙江嘉兴，15岁考入南开大学数学系，受姜立夫教授的提携，获益良多。1930～1934年入清华研究院，随著名数学家熊庆来、孙光远、杨武之（杨振宁的父亲）、郑桐荪（郑士宁的父亲）学习。1934年公费留美，转德国汉堡大学，1936年获博士学位。1936～1937年在法国巴黎随当代几何大师E·嘉当做研究工作。抗日战争爆发回国，在长沙临时大学（北大、清华、南开合办）、昆明西南联合大学任教授。1939年与郑士宁结婚。陈省身在“我的科学生涯与著作梗概”（1978）中写道：“我在数学研究中取得之成就，实乃我俩共同努力之结晶。”

1943～1945年陈省身在美国普林斯顿高级研究院任研究员，给出了“高斯—邦尼公式新的内蕴证明”。他在微分几何上的贡献，将数学带入一个新纪元。

陈省身1946年春回国，与姜立夫筹组中央研究院数学研究所，陈任第一届院士，培训了一批拓扑学人材，如吴文俊、廖山涛、陈国才、张素诚、杨忠道等。

1949～1960年在美国芝加哥大学任教授。这11年中他指导了10个杰出的博士生。1960～1979年在美伯克利加州大学，将数学系建成世界著名的几何学中心，有31人随他完成博士学位，1981～1984年任伯克利数学科学研究所首任所

长。

陈省身热爱祖国，希望中国数学能跻身于世界数学领导地位，光复 14 世纪以前数学王国的荣誉。他认为要达到这个目的，第一要培养出一批年轻有为且不求个人名利而有雄心壮志的数学工作者；第二要有足够的经费，完善的研究室和国内外的数学交流。他为了促进中国成为数学强国，曾两次回国主办研究所：1946 年办中央研究院数学研究所，1984 年在美国退休后回天津办南开数学研究所，仿普林斯顿高级研究所的模式，希望中国各大学的研究生以及教师能有机会与中外数学家进行研究和交流，并创造一个好的研究环境，以吸引在国外获得博士学位的留学生回国工作。他还为老师姜立夫在南开大学建立了铜像。

陈省身 1961 年当选为美国国家科学院院士，1975 年获美国国家科学奖，1983 年获沃尔夫（Wolf）奖，是英国皇家学会、意大利国家科学院、法国科学院的国外院士。陈省身曾三次应邀在国际数学家大会作报告：第一次是 1950 年在美国麻省剑桥，第二次是 1958 年在苏格兰的爱丁堡，第三次是 1970 年在法国尼斯。

陈省身对数学兴趣十分广泛，许多部门都有重要的贡献，其中主要有：几何结构与等价问题、积分几何、欧氏微分几何、极小子流行、全纯映射、网、外微分系统和偏微分方程、高氏－邦尼公式、示性类等。

12　苏步青

苏步青（1902～2003），微分几何学家，1902 年 9 月出生于浙江平阳，1919 年赴日本留学，进东亚日语预备学校，1920 年考入东京高等工业学校电机系，1924 年入东北帝国大学数学系，1927 年读研究生，1928 年同松本教授女儿松本米子结婚，1931 年获理学博士。回国任浙江大学数学系副教授，1933 年升教授，1948 年任中央研究院院士，1952 年并任复旦大学教务长，1955 年选为中国科学院学部委员，国务院学位委员。1956 年任复旦大学副校长，1978 年任校长。1935 年发起成立中国数学会，任学报主编，中国数学会副理事长，后任名誉理事长，全国政协副主席，全国人大代表，中国民主同盟中央副主席。

1955 年起曾赴日本、保加利亚、罗马尼亚、匈牙利、德国、苏联、法国、比利时、泰国等考察访问。

苏步青在仿射微分几何中的重大发现是苏锥面，在射影曲线论中提出苏二次曲面和苏链。在高维空间共轭网理论中出版了《射影共轭网概论》，总结了这方面的研究成果。对一般空间微分几何的发展作出了重要贡献，写进了他的专著《一般空间的微分几何学》。苏步青由于对经济建设的关心，把代数曲线论的仿射不变量方法首创性地引入计算几何学科，出版了《计算几何》。该书英译本在国际上引起了重视。

苏步青是一位热爱祖国、品德高尚、事业心强、治学严谨的著名科学家。

"树立理想、刻苦奋斗、珍惜时间、凡事认真"是他的座右铭。他重视基础。他说:"没有基础就没有赖以成长的土壤,怎么能够开花结果呢?"苏步青性格开朗,爱好体育,坚持锻炼,九十高龄还日行一二公里。其健身法也很值得学习。

13 王元

王元,1930年十月生于浙江兰谿,1948年考人浙江英士大学数学系,1949年并入了浙江大学。参加了陈建功、苏步青举办的读书讨论班,四年级在讨论班上报告了英国哈姆的"素数分布论"。毕业后被推荐到中国科学院数学所研究数论,1979年升研究员,1980年被选为中国科学院学部委员,1984年任数学所所长,1988年选为中国数学会理事长。

王元在华罗庚的指引下研究数论,很快就显示出才华,在波兰数学学刊发表的论文为国际上所重视。1953年起王元参加了华罗庚主持的哥德巴赫猜想讨论班,王元认为必须改进筛法,将各种筛法综合起来,这一构想使他证明了"3+4"(1956),随之又证明了"2+3"(1957),进而证明了"1+4"(1964)。1965年陈景润证明了"1+2"之后,王元又进一步寻求简化这个定理的证明,并获得成功,为国际上所关注,认为中国在哥德巴赫猜想的研究领域已跃居世界领先地位。

苏联维诺格拉陀夫和意大利彭比尼用王元估计法证明了"1+3",陈景润在证明"1+2"时其关键的想法是在王元估计法的基础上引进了新项Ω,并给以新的估计。其后出现了五种简化方案,其中最简单又本质的证明是由王元与潘承洞合作完成的。王元关于哥德巴赫猜想的研究,确立了他作为著名数论学家的地位。1982年王元、陈景润、潘承洞共同获得国家自然科学一等奖。华罗庚与王元合著《数论在近似分析中的应用》(科学出版社与施普林格出版社出版)给出了数论方法成为多重积分近似计算的重要途径,被国际学术界誉为"华—王方法"。美国数学会通报评论说:华、王的著作对于数值积分以及微分方程积分方程的求解是最有价值的贡献。

1980年以后,王元又开拓了一个新的探索领域——代数数域上的堆垒数论。这个领域最初是由数学家西格尔开创的。华罗庚在50年代初也作过研究,王元选择华林问题的变体加型方程

$$a_1x_1^k + a_2x_2^k + \cdots + a_sx_s^k = 0 \quad ,$$

数学家施密特1979年曾证明当k为奇数,s充分大时该方程有一很小的非全为0的整数解。王元将施密特与西格尔的方法结合起来而将施密特定理推广到任何代数数域K,并证明当K为全虚域时定理对偶数k仍成立。此后王元又在代数数域上的丢番图不等式组的研究做出了出色的贡献,写成专著《代数数域上的丢番图方程与不等式》,由施普林格出版社出版。国际评论王元这一成就是对与哈代–李特伍德(Hardy–Littlewood)圆法有关的文献有价值的贡献。

王元的学术成就使他在国际数学界享有威誉。他是世界科学出版社顾问，德国《分析》杂志编委，施普林格《图论与组合》杂志编委。曾应邀赴美、英、德、法、日、加拿大、新加坡、菲律宾、泰国讲学，为提高我国数学的国际地位作出了贡献。

14 陈景润

前面提到哥德巴赫猜想，这个数学皇冠上的明珠被我国厦门大学青年教师陈景润于1960年证明了"1+2"，即，每一个充分大的偶数都能够表示为一个素数与一个不超过二个素数的乘积之和，1973年发表了详细论证，1974年英国数学家哈勃斯丹和德国数学家李查特在伦敦出版的《筛法》中作为一章介绍了"陈氏定理"，赞誉陈景润的成果构成筛法理论的顶点。还有数学家称中国的陈景润"移动了群山"，为祖国赢得了荣誉。

陈景润（1933~1996），福建人，从小就是读书迷、数学王子。他说："我读书不只满足于读懂，而是要把读懂的东西背得滚瓜烂熟，熟才能生巧！"

他的老师沈元，知识渊博，启发性强，经常讲些数学故事，介绍数学家刘徽、祖冲之、秦九韶、朱世杰的创造发明，鼓励学生将来做数学家，做发明家，还讲了欧拉七桥、纵横图、费马猜想、尤其是哥德巴赫猜想十分吸引陈景润。陈在中学就自学大学的微积分，把基础打好、打宽打扎实，上了大学，更是一头扎进图书馆。厦门大学毕业后留校工作，更有条件钻研数学了。他将所写数论方面的论文寄给中国科学院数学研究所。华罗庚看了他有关塔利问题的论文，发现了这个"千里马"，把他调来数学研究所，1957年是实习研究员。1958年陈景润在华林问题中得到

$$G(k) \leqslant k(3\ln k + 52) \quad ,$$

1962年任助理研究员。1964年他证明了

$$g(5) = 37 \quad ,$$

以后又得到

$$g(4) \leqslant 27 \quad 。$$

1966年他对"筛法"作了重要的改进，证明了"1+2"，距哥德巴赫猜想（"1+1"）只差一步了。文化大革命中仍然坚持他的研究，成为"两耳不闻窗外事"的典型。1977年提升为研究员，1978年起带硕士研究生。1978~1979年应邀去美国、法国、英国讲学。从1958年到1990年他发表论文五十多篇，专著四部，获得国家自然科学一等奖，被选为学部委员。

1966年关于"1+2"（或记为{1，2}）仅叙述了几个引理的结论，没有详细的证明。1973年他发表了{1，2}的详细证明，并改进了1966年宣布的数值结果，引起国际数学界的轰动，被公认为陈氏定理，是对哥德巴赫猜想的重大贡献，是筛法理论光辉的顶点。以后我国数学家潘承洞、丁夏畦、王元又给出了简

化证明。现在哥德巴赫猜想的世界纪录仍在中国。

陈景润体弱多病，但他忘我工作，终因积劳成疾一病不起，于1996年春谢世。他没有虚度年华，却为国家夺得明珠。

15 夏道行

1980年春天，美国加里福尼亚大学的报告厅里一位中国数学家在讲演，一个听报告的系主任说：“我听了很多次学术报告，最感人最令人钦佩的有两次，一次是美国数学家马恺，这次是中国的马恺！”他指的就是当时50岁的夏道行教授。

夏道行，1930年出生在江苏泰州一个小学教师的家庭。五岁上学时，父亲教他一首诗：“三更灯火五更鸡，正是男儿立志时，黑发不知勤学早，白头方悔读书迟。”夏道行背得很熟，凭一点小聪明，不费功夫，名列前茅。到了初中，看小说上了瘾，堂上不听讲，课后不读书，小聪明不顶事了，成绩下降。幸好遇到一位冯老师，他被日本飞机炸断了一条手臂。冯老师说：“为什么日本鬼子敢于欺负我们？就是因为我们贫穷落后，一盘散沙，我们一定要努力读书，团结奋斗，昭雪国耻。”冯老师语重心长，感动了夏道行，悄悄地把小说塞进了书包。

此后夏道行变了样，早起迟睡，真是三更灯火五更鸡，发奋读书，数学特别突出，决心学居里夫人，用科学为人类造福。

他19岁考上陈建功的研究生，22岁在复旦大学任教时发表《关于单叶函数之系数》的著名论文，1957年提出“亚正常算子理论”，1965年出版了《无限维空间上测度和积分论》，1972年在美国出英文版，是国际上这个方向的第一本专著。关于拟不变测度存在性和连续性定理被称为“夏道行定理”。1972年提出关于拟线性泛函的一个不等式被称为“夏道行不等式”。1976年国际函数论会议上介绍了他建立的“夏道行函数”。

16 冯康

冯康是北京大学教授，1965年首创“有限元方法”。他根据我国水利建设的需要，以数学观点提出问题，并重视数学方法与物理机理相结合。为当代世界计算数学与计算力学作出了重要成果。

有限元法是求解连续体偏微分方程的一种数值方法。其特征是：化整为零，裁弯取直，以简驭繁，化难为易。特别适用于高度复杂的工程设计和科学计算，并便于在电脑上实现。在创始后的二十年内，它已推广到工程行业和科学领域，开辟了新的学科方向，导致了工程设计分析的重大革新，为应用数学开辟了新航程，也是将科学技术转换为生产力的典范，是当今科学研究的重要方向。

由于冯康在计算数学上的贡献，曾应法国国家科学中心、意大利国家科学院、日本国的邀请，先后在巴黎、罗马、米兰、佛罗伦萨、巴维亚、东京、京都等大学讲授有限元理论。1978年出席巴黎国际工程计算方法会议，并担任执行主席，为祖国争得了荣誉。

17 陆启铿

陆启铿是双脚残废的数学家，1927年生于广东省佛山市，家境贫困，身残志坚，靠自学和半工半读毕业于中山大学数学系。1951年被华罗庚推荐到中国科学院数学研究所，先后任研究实习员、助理研究员、副研究员、研究员、副所长、学部委员。

陆启铿曾发表《Schwarz引理及解析不变量》、《关于常曲率的Kahler流形》(1966)，提出国际上知名的“陆启铿猜想”、“陆启铿域”。1974年发表《规范场与主纤维丛上的联络》，证明杨振宁博士的规范场的积分定义等价于沿一曲线的平行移动。陆启铿与华罗庚合作的论文《典型域的调和函数论》，建立了典型域上调和函数的系统理论。

我国古代数学自19世纪以来后继无人，中落近500年，到18世纪西学输入，进入转折时期，新中国成立后，近代数学逐渐发展，超世界水平的数学家日渐增多，不愧“代有达人，常胜不衰”，这是世界上罕见的。古希腊从公元前6世纪到公元4世纪，有“言必称希腊”的美称，也不过1000年；阿拉伯文化从8世纪到13世纪，只有600年；现在欧洲发达国家，从10世纪开始，历史就更短了，至多也只有1000年；日本、美国从17世纪开始就更不用说了。我国要算世界上数学历史最悠久的国家，从发展趋势来看，是未可限量的。

这些数学家之所以成名，成为祖国和世界的名人，从资料上看主要是：勤奋、理想、意志、才华（包括基础）、老师和家长的教育与提携。这个结论正好和心理学家柯克斯对公元1450－1850四百年间301位世界伟人的研究结果完全一致。这是历史的经验总结，我们教育工作者以及青少年都要引以为训。

建议我们的中学教材引进或附录有关数学家的轶事，大学数学系应增添数学史课程，让教师“胸有典史”便于教学，让学生有所效法和反思，让青年人知道我国曾经是数学王国，从而振奋精神，还我数学王国，振兴中华。

8.2 西方数学家轶事

我们在中学教材里见到牛顿二项式定理、韦达定理，大学教材里见到牛顿-来布尼兹公式、洛比达法则、欧拉定理、拉普拉斯变换等等。常有学生问：“这些发现，他们是怎么想出来的？他们是不是天才？”我们教师应该熟悉有关数学家的故事，满足学生的求知欲，特别是这些素材，可以启发思维，引起学生兴趣，有些故事可以激起学生的奋发精神（如前面提到的陈景润、夏道行的故事）。另一方面，我们教师也应该有广博的知识，在教学上也要考虑“知识面”，不能“干巴巴”的照本宣科。

这里选辑了欧几里德、笛卡尔、牛顿、欧拉等十几位西方数学家，介绍他们的生平、成就，一方面满足学生的求知欲，对数学史作些补充，另一方面介绍他们的勤奋、求实、创新精神，以及精心思索、自学成材、热情提携、甘当伯乐的事迹，使读者有所鼓励、有所奋进。

1 欧几里得

欧几里得（Euclid，330~275B.C.）是亚历山大前期[①]第一个大数学家和教育家。他于公元前300年在埃及亚历山大城开始教授数学，他热心教育，教学严格，反对在学习上不刻苦钻研、投机取巧的作风，也反对急功近利的狭隘实用观点。

据普罗克拉斯（Proclus，410~485）记载：托勒密王（367~285B.C.）问欧几里得，除了他的《几何原本》外有没有其它捷径来学几何？欧几里得回答说：“几何无王者之道！”又据希腊作家斯托比亚斯（约500年）记述：有一青年才开始学第一个命题，就问他学了几何之后将得到些什么？欧几里得说：“给他三个钱币，因为他想在学习中获取实利。”

欧几里得著作很多，最出名的是《几何原本》，其中的材料据普罗克拉斯说，欧氏把攸多克萨斯（Eudoxus，408~355B. C.）的许多定理收入《几何原本》中，完善了Theaetetus的定理，并对前人未证或证明不完全的给予无懈可击的论证。

《几何原本》共13篇，有467个命题。

---

① 公元前四世纪到公元前146年古希腊灭亡，罗马成为地中海区域的统治者为止，史称亚历山大前期。

《几何原本》是最早的、内容最丰富的数学书，从中可以学到对数学本身的看法，对证明的想法，对定理按逻辑次序的排法。它作为最优秀的教本使用了一千年。

欧几里得在书中一开始就列出了所有的公理，明确提出所有的定义，和有条不紊、由浅入深的一系列定理，这种陈述方式提供了公理化体系的典范。他对公理的选择是很出色的，能用少数公理证出几百条定理。对平行公理的处理煞费心机，他无疑知道这条公理并不是不证自明的，凡涉及到无限远空间都是含糊不清的，而这条公理又是不能省略的。

《几何原本》这个两千年前的著作，经受了时间的考验，正如德国数学史家韩克尔（Hankel，1839～1873）所说："在大多数科学里，一代人要推倒另一代人所修筑的东西，一个人所树立的另一个人要加以摧毁，只有数学，每一代人都能在旧建筑上增添一层楼。"

2 阿基米德

希腊的阿基米德（Archimedes，287～212B.C.）是世界上公认的一位古代最伟大的数学家和物理学家。近代数学史家倍尔（Bell，1883～1960）说：任何一张列出有史以来三个最伟大的数学家的名单中必定会包括阿基米德，另外两个通常是牛顿和高斯。

阿基米德一生从事数学研究，勤于思考，勇于探索，热爱人民，献身祖国，给后人留下了光辉的榜样。

他在数学上的贡献有：

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7};$$

$$S_{球}=4\pi R^2;$$

$$球体积=\frac{2}{3}外切圆柱体积;$$

$$球面积=\frac{2}{3}外切圆柱面积。$$

他第一次处理高阶等差数列的例子：

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n\ (n+1)\ (2n+1)。$$

用圆锥曲线方法，解决相当于

$$x^3\mp ax^2\pm b^2c=0$$

的三次方程。

阿基米德提出的"群牛问题"，实质上归结为解二次不定方程

$$x^2-4729494y^2=1,$$

它的解的位数要超过20万。他还研究了阿基米德螺线

$$\rho = a\theta$$

等等。

阿基米德距今已经两千多年了，不少著作中写了一些传说，歌颂他的智慧和品德。

传说叙拉古的亥厄洛王命人造了一个纯金的皇冠，国王怀疑是否掺有银子，请阿基米德鉴定。他想了很久，没有结果。一次去浴室洗澡，当他跨进浴盆，身子泡到水里，水慢慢地溢出浴盆，身子入水越深，水越往外溢，身子感到越轻。他忽然想到不同的物体，虽然重量相同，如果体积不同，排出的水必不相等，据此可以判断王冠是否掺有杂质。经过仔细的实验，终于发现流体静力学的一条基本原理：阿基米德原理——物体在液体中减轻的重量，等于排去液体的重量。

另一个传说是，第二次布匿战争时期，阿基米德用科学技术保卫祖国，说他用起重机抓起敌船，摔得粉碎，用巨大的反射日光的火镜使敌船焚烧。为了挽救自己的祖国，他竭尽心智，重创敌人。终因粮食耗尽而陷落。罗马兵入城时，统师马塞拉斯因敬佩阿基米德的才能，下令不许伤害他，而阿基米德似乎不知城池已破，还沉迷在数学的深思之中，当罗马兵闯入时，阿基米德怒斥士兵："不要弄坏我的圆！"这位伟大的科学家竟牺牲在无知的士兵手下！事后马塞拉斯处死了这个士兵。人们在阿基米德的墓碑上刻着球外切圆柱的图形来纪念这位爱国的数学家。

3　纳皮尔

苏格兰数学家纳皮尔（Napier John，1550～1617），13岁入圣安德卢斯大学学数学。他受几何数列的项与算术数列的相应项之间的对应关系的启发，而完成了化真数相乘为对数相加的一种新运算——对数。

纳皮尔1614年发表《论述对数的奇迹》，轰动了欧洲。纳皮尔的对数与今天的常用对数、自然对数都不一样。他定义的 x、y 的对数，记

$$x = a\ln\frac{a}{y}, \qquad a = 10^7$$

纳皮尔对数用 Naplg$y$ 表示，即

$$\mathrm{Naplg}\,y = 10^7\ln\frac{10^7}{y}$$

现在已不用了。

1615年牛津大学天文学教授布里格斯（Briggs，1561～1631）向纳皮尔建议取10作为底数，可使计算简化。布里格斯算出了一个对数表。现在常用的对数表就是从布里格斯对数表演变而来的。纳皮尔对数字计算很有研究，当时球面三角中的"纳皮尔比拟式"、"纳皮尔圆部法则"、"纳皮尔算筹"（作乘除法用）都享有盛名。

独立发明对数的还另有其人，瑞士的仪器匠彪奇（Bürgi，1552～1632）有志于简化天文计算。他受史提非（Stifel，1487～1567）“几何数列中两项的乘除法可用指数的加减法来完成”的启发，而于1600年独立发明了对数（比纳皮尔要早）。他的著作《进数表》1620年才发表，那时纳皮尔对数已闻名全欧。

以后欧拉把对数定义为指数，1728年他用e作为自然对数的底。

17世纪中叶对数传入我国，清顺治三年（1648）波兰人穆尼阁来我国，与薛凤祚合编《比例对数表》（1653）。这是我国最早的对数著作。清戴煦著《对数简法》（1845）、《续对数简法》（1846）、《假数测圆》（1852），英国人艾约瑟（1825～1905）把它译成英文出版。

4 笛卡尔

法国的笛卡尔（Descartes，1596～1650），是17世纪杰出的数学家、物理学家。他有一段充满改革创新精神的讲话：“我决心放弃那个仅仅是抽象的几何，这就是说，不再去考虑那些仅仅是用来练习思想的问题。我这样做，是为了研究另一种几何，即目的在于解释自然现象的几何。”在这一思想的指导下，他创造出一门崭新的解析几何，使数学从初等数学发展为变量数学。

笛卡尔1604～1612年在耶苏会学校学习，认识了同学梅森（Mersenne，1588～1648）（以后成为数学家，梅森素数的发明者）两人成为至交。他20岁毕业于普瓦界大学，在那里和迈多治（Mgderge，1585～1647）友善，一起研究数学。迈多治也是数学家，他体会“学要好伴”是很重要的，他们一起学习，一起成名。

1617～1621年笛卡尔在军队中服役，仍然研究数学。一次在荷兰布莱达遇见一个挑战性的招贴——求解一道难题，被他解决了。这使他自信有数学才能，下定决心，终生研究数学。

1628年他移居荷兰，在那里住了20年，潜力钻研，写出了不少名著。1629～1633年完成了《宇宙论》一书，因伽利略（1564～1642）提倡地动说被教庭判罪，笛卡尔怕给自己找麻烦，不敢付印，过了30年，到1664年他死后14年《宇宙论》才得问世。

笛卡尔的权威著作《方法论》1637年在莱顿出版，其中包括著名的《几何学》，那时几何是数学的同义语。

《几何学》分三卷：

第一卷讨论尺规作图；

第二卷曲线的性质；

第三卷立体与超立体的作用，属于代数问题，探讨方程根的性质，包含现在方程论中笛卡尔正负号规则：“实系数方程

$$f(x)=0$$

所有正根的个数，不能大于其变号数，所有负根的个根不能大于

$$f(-x)=0$$

的变号数"。例如

$$f(x)=x^2+3x+2=0$$

变号数为0，故无正根；

$$f(-x)=x^2-3x+2=0$$

变号数为2，故原方程有二个负根。

该书的中心思想是利用坐标（平面上的点和实数对的对应关系）建立起一种普遍的数学，使算术、代数和几何统一起来。他考虑二元方程

$$F(x, y)=0$$

的性质，满足这方程的实数对 (x, y) 在平面上构成一条曲线，于是一个方程可以通过几何的直观和方法去处理。反之，可以离开几何图形，用代数的方法研究曲线的性质，具有某种性质的曲线可用一个方程来表示，这就是解析几何的新思想。

与笛卡尔同时的数学家费马也有坐标几何的思想，他提出用方程来表示曲线，并通过对方程的研究来推断曲线的性质。他和笛卡尔经常通信讨论数学问题，他们互相仰慕、批评，成为好友。费马写过关于解析几何的文章，生前都没有发表，到1679年才由别人刊出问世。

笛卡尔的科学观，特别是科学数学化的观点，推动了科学的发展，也使数学的应用拓展到许多科学的领域，并在实践中发展了数学。

被称为近代文明之父的伽利略（Galilei，1564～1642）与笛卡尔持相同的科学观，在他的著作 Opere 中写道："这书是用数学语言写出的，符号是三角形、圆形和别的几何图象，没有它们的帮助，是连一个字也不会认识的；没有它们，人就在一个黑暗的迷宫里劳而无功地游荡着。"这本书写的是物理，伽里略认为：任何科学分支应像数学一样从公理出发，通过演绎推论而建立新的真理，这个思想所探求的是在数学模型指引下的演绎结构。

支持这个观点的有笛卡尔、惠更斯（Huygens，1629～1695）和牛顿。伽里略、笛卡尔、惠更斯和牛顿四人被认为是近代科学造型的人。他们都是以数学家的身份去探索自然，他们坚信要按数学的程序去进行科学的探索和研究。"科学产生于用数学解释自然。"这一思想，以后称为科学的数学化，近百年来已成为科学研究中的一股潮流。

5 牛顿

牛顿（Newton，Isaac，1642～1727）是世界上最伟大的物理学家、数学家、天文学家和哲学家。他的三大发明——微积分、万有引力和光的分析，改变和发展了数学、物理学和科学技术的面貌。

牛顿的科学观和物理学数学化的思想为世人所称颂。他认为研究物理学有两

个基本思想：一是实践性，基本的原理必须来自实践，并接受实践的检验；二是数学化，把物理学从量的分析表述为数学模型，通过推理计算建立新的真理。

牛顿出生于英格兰乌尔斯托帕的乡村里，父亲在他出生前两个月就去世了，母亲难以为生，再嫁给一位乡村教师。牛顿跟外祖母过贫困的生活，在一所乡村学校里读书，除了对机械设备感兴趣外没有什么特殊的才华。他喜欢玩锤子、锯子；自己做了一个"太阳钟"，其实就是一块木板，中央钉一个长的钉子，钉子四周画许多放射形线条，在太阳照射下，可以看出到了什么时辰。他外祖母问他是谁教他做的，牛顿不好意思的说："是我想出来的。"

牛顿14岁回乡务农，有空仍自学数学。舅舅看他有出息，想方设法让他读书，由于时学时辍，成绩不好，受人歧视，牛顿好胜，发愤图强，下决心当高材生，终于以特优成绩考上剑桥大学，受到了巴鲁（Barrow，1630～1677）教授的教诲与提携。

牛顿大学毕业时伦敦鼠疫流行，学校关闭，他离开剑桥，在乡下度过了两年（1665～1666，他23～24岁）开始了他在机械、数学和光学上的伟大工作，他意识到引力的平方反比定律，打开了力学科学的大门；他获得了解决微分、积分问题的一般方法；通过光学实验，他发现白光是从紫色到红色各种颜色光混合而成的。牛顿后来说："这些都是在1665和1666两个鼠疫年中做的，在这些日子里，我正处在发现力最盛的时期。"他的成就是来自他所说的发现力（或创造力），这种力的基础是刻苦钻研、精心思索、敏锐观察、反复实验。也有人说牛顿是空前的天才，爱迪生则说："天才是百分之九十九的汗水，加百分之一的灵感。"我国古谚说"涉浅水者见虾，其颇深者见鱼鳖，其尤甚者见蛟龙"。天才其见蛟龙者乎！

1667年牛顿回到剑桥，获硕士学位，并选为三一学院研究员。1669年巴鲁教授宣称，牛顿的学识已超过自己，将"路卡斯教授"① 让给牛顿。这时牛顿才26岁。

牛顿一心放在科学研究的事业上，科学上许多新的问题不断地涌向他的脑海，不得到解决，决不罢休，他失去了姑娘们的爱情，以致终生未娶。

牛顿的科学成就也是唯物论的重大支持。惹怒了主观唯心论哲学家贝克莱（1685～1753），攻击流数术（导数）极尽讥讽挖苦之能事，贝克莱说："如果 x 取得一增量 i（$i\neq0$），那么 x^n 的增量被 i 除是

$$nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}i+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}i^2+\cdots$$

现在又令 $i=0$，求出 x^n 的流动率 nx^{n-1}，这时假设突然改变，（i 原先是假定不

---

① 遵照路卡斯（Lucas，？～1663）的遗嘱设立的荣誉教授职位，每年有额外的津贴。

为零的），这简直是瞪着眼睛说瞎话。”

微积分是唯物主义科学，把别人的攻击看作批评意见，认真地考验自己的基础（见以后关于柯西的介绍），顶着逆风破浪前进，达朗贝尔（1717－1783）有句名言："向前进，你就会产生信念，”足以表征这个时代的唯物主义精神，也是当时科学家的伟大胸怀。

后来由于微积分在实际应用方面的胜利，连贝克莱也不得不在事实面前低头。他说："流数术是一把万能的钥匙，借着它，近代数学家打开了几何以至自然的秘密。”

6 莱布尼兹

莱布尼兹（Leibniz，1646－1716）德国人，是另一个微积分的创始人。他学识渊博，多才多艺，精通数学、物理、生物、历史、地质、机械、法律、神学、语言、外交，是一个全面的通才，与我国宋初沈括有很多相似之处。他一生勤苦好学的主要动机是要寻求一种可以获得知识和创造发明的普遍方法。他认为一个人的志趣和理想决定以后，学习方法是很关键的，他是从方法论的角度发明微积分的。他写的世界上第一篇微积分的论文："一种求极大极小和切线的新方法，它也适用于分式和无理量，以及这种方法的奇妙类型的计算，”发表于1684年《学艺》杂志上。

为了说明莱布尼兹探求的新方法，我们举两个例子，一个是切线，一个是极值。

例1 求过曲线

$$y=f(x)$$

上一点的切线斜率。

如图19，在曲线

$$y=f(x)$$

上取一点 $M_0(x_0,\ y_0)$，过 M_0 作切线 M_0T，斜率为 $\tan\alpha$，这里 $f(x)$ 和 $(x_0,\ y_0)$ 是已知的，如何求 $\tan\alpha$ 呢？莱布尼兹设想在曲线上另取一点

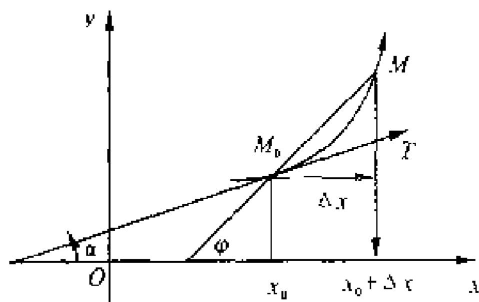


图19

$$M(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y),$$

则 $$y_0+\Delta y=f(x_0+\Delta x),$$

$$\because\quad y_0=f(x_0)$$

$$\therefore\quad \Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

于是割线 M_0M 的斜率 $=\tan\alpha=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，他运用极限的理论，

当 $\Delta x \to 0$ 时，$M \to M_0$，割线 $M_0M \to$ 切线 M_0T。

$$\therefore \quad \text{切线 } M_0T \text{ 的斜率} = \tan\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}。$$

莱布尼兹把它定义为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的导数，记为 $f'(x_0)$。曲线 $y = f(x)$ 上点 M_0 的切线的斜率就是导数的几何意义。

例 2　求函数

$$y = x^2 - 2x + 5$$

的极值，并推广到一般的函数 $y = f(x)$。

依初等数学的配方法，

$$y = x^2 - 2x + 5 = x^2 - 2x + 1 + 4 = (x - 1)^2 + 4。$$

当 $x = 1$ 时，$y = 4$ 为极小值。

这个方法不能推广到一般的函数。

依例 1 中的方法（微分法），

$$y' = 2x - 2,$$

令 $y' = 0$，求出 $x = 1$，所以当 $x = 1$ 时，$y = 4$ 为极值，因 $y'' = 2 > 0$，知 $y = 4$ 为极小值。

对于一般的函数

$$y = f(x),$$

作出它的图象（如图 20），发现函数取极值的点 x_1，x_2，应有水平方向的切线，即

$$\tan\alpha = 0$$

于是可以找到一般的方法来求：

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{（设为 } f'(x)\text{）}$$

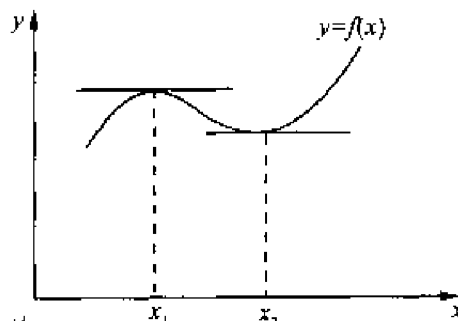


图 20

现在　$f(x) = x^2 - 2x + 5$，

$$f'(x) = 2x - 2,$$

令 $f'(x) = 0$，得 $x = 1$，此时 $f(1) = 4$，为函数的极值。

函数的导数，就是变化率。马尔萨斯的人口论，就是研究人口的变化率；牛顿的冷却定律也是研究物体的温度的变化率；生物的生长曲线也是研究生物的生长率。这一系列的问题，万变不离其宗，都可以利用函数的导数来解决。这是过去初等数学所不能解决的，可见莱布尼兹要寻找一种普遍方法，是具有何等的远见卓识！牛顿、莱布尼兹的贡献就是开创了这种新的数学方法——微分法，还有积分法，并据此开创一个新的科学世界。

牛顿和莱布尼兹各自发明微积分，正如罗巴契夫斯基、J·包耶和黎曼各自发现非欧几何一样，是正常的、是值得称颂的，但是由于狭隘的民族偏见，竟引发

了长达一百多年的所谓发明权的争端。这里作为史料补述如下：

莱布尼兹的论文是1675年完成的，公开发表是1684年；而牛顿的发现是1665年，比莱布尼兹早10年，但到1687年才公开发表，比莱布尼兹又晚3年。

1674年莱布尼兹写信给英国皇家学会秘书奥丁堡（1615～1677）①，说他用无穷级数得到关于化圆为方问题的定理，其中有

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-+\cdots,$$

奥丁堡回信说：牛顿和格利哥里（1638～1675）都曾发现求面积的方法，并用到圆上去，这里是指格列哥里1667年得到展开式

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+-\cdots,$$

令 $x=1$，即得莱布尼兹的公式，这一点信上并未说明，莱布尼兹很想知道这种方法。

1676年6月牛顿答复询问，经奥丁堡转给莱布尼兹，其中有二项定理、正弦及反正弦的展开式

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-+\cdots,$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots。$$

以及椭圆弧的无穷级数展开式。8月莱布尼兹请求将证明给他，10月牛顿回信叙述无穷级数、内插法、用二项定理求曲线形面积和弧长，并说在1665～1666年间已发现微积分法，但没有解释这一方法。

1677年莱布尼兹回信解释求切线的方法。

1684年莱布尼兹发表微分法，1686年发表积分法。

1687年牛顿的流数术写进《原理》中，而《流数术》直到他死后九年（1736）才出版。

引起事端的是瑞士人丢利埃（1664～1753），他断言是牛顿发明了微积分，而莱布尼兹是剽窃的。1700年莱布尼兹不得不在《学艺》上予以反驳。以后又争辩了许多年。牛顿和莱布尼兹死后，他们的崇拜者仍争辩不休。

英国派比较保守，沿用牛顿的符号和概念，大陆派除用莱布尼兹的比较优越的表达式外，经伯努利家族、欧拉、达朗贝尔、拉格朗日、拉普拉斯等的发扬光大，远远超过了英国派。用巴培治（1792～1871）的话是“d主义”（莱布尼兹用 dy、dx）超过了“点时代”（牛顿用 $\dot{x}$、$\ddot{x}$）。

微积分问世后并不是一帆风顺的，它既有主观唯心论者的攻击，也有不懂微

---

① 奥丁堡是英国数学家，牛顿是英国皇家学会会长。

积分的学者的非难，如前面贝克莱的例子，指责：“导数

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

是不存在的，竟然可以求出来。”

当时微积分有些基础问题还没有解决，荷兰哲学家尼文太（1654 ~ 1718）不赞成略去无穷小量，否认高阶微分的存在，当时莱布尼兹还健在，也没作圆满的答复。但“九层之台，起于垒土”，没有牛顿、莱布尼兹发现于前，哪有数学分析光大于后，“微斯人其谁与归！”

7 伯努利家族

伯努利是瑞士巴塞尔的数学世家，从 17 世纪到 19 世纪，这个家族祖孙四代有数学家十多人，可与我国梅文鼎家族媲美，下表给出他家 10 位欧洲杰出的数学家。

第一代	尼古拉伯努利（1623 ~ 1708）	
第二代	雅各Ⅰ（1654 ~ 1705）	猜度术
	尼古拉Ⅰ（1662 ~ 1716）	
	约翰Ⅰ（1667 ~ 1748）	最速降落
第三代	尼古拉Ⅱ（1687 ~ 1759）	彼得堡问题
	尼古拉Ⅲ（1695 ~ 1726）	流体动力学
	丹尼尔（1700 ~ 1782）	
	约翰Ⅱ（1710 ~ 1790）	
第四代	约翰Ⅲ（1746 ~ 1807）	
	雅各Ⅱ（1756 ~ 1789	

尼古拉伯努利是这个家族的创业人，作过教师、牧师，后来成为数学教授。他治家严谨，要儿孙自学成材，不许行不义之事，发不义之财，鼓励他们在学术上超过前人。

他的大儿子雅各Ⅰ（Jacob 或 James），二儿子约翰都做过牧师，经过商，自学数学，成为牛顿莱布尼兹以后微积分的奠基人，他两兄弟常和莱布尼兹、惠更斯通信，共同研究数学，也提出挑战。

雅各伯努利 1695 年提出解伯努利方程

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n,$$

约翰伯努利给出了一种解法，雅各伯努利又用分离变量法解决，他们都是在通信中交流的。约翰Ⅰ的儿子尼古拉Ⅲ和丹尼尔也参与了。他们几人就这样各自钻

研、通信讨论，把微积分学和微分方程推向新的进程。

1694 年雅各伯努利的论文讨论了双纽线

$$r = a^2\cos 2\theta$$

的性质，以后命名为伯努利双纽线。雅各Ⅰ的巨著《猜度术》和《推想的艺术》（有关概率的研究）中引入了应用很广的伯努利数和伯努利多项式。

约翰伯努利还解决了抛射体的微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - kv^n = mg$$

和一阶嘉当方程

$$M(x,\ y)\ \mathrm{d}x + N(x,\ y)\ \mathrm{d}y = 0。$$

1696 年约翰Ⅰ向全欧挑战，提出“最速降线”问题。这个难题罗比达（L' Hospital，1661～1704）、雅各、莱布尼兹和牛顿都解决了。后来欧拉和拉格朗日发明这类问题的普遍解法，引发了变分法的诞生。

欧拉和罗比达都是约翰伯努利的得意学生。著名的罗比达法则① 是约翰在 1694 年在信中告诉罗比达的，罗比达在其著作中写进了这个法则，并加以证明，后人就用了罗比达的名字。

尼古拉Ⅱ伯努利是老尼古拉的侄儿，在 1712～1713 年给莱布尼兹的信中讨论过无穷级数的收敛与发散问题，如当 $x > 1$ 时，

$$(1-x)^{-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}x^2 + \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 + \cdots,$$

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots。$$

两个级数都是发散的，左边并不是它的和，在当时这个结论是惊人的。

尼古拉Ⅱ在 1742～1743 年与欧拉的通信中指出

$$\frac{1}{1-x} \neq 1 + x + x^2 + \cdots$$

因为余项 $\frac{x^{n+1}}{1-x}$ 是丢掉了的，这个通信讨论，持续了好几年，哥德巴赫也参加了。

丹尼尔伯努利是约翰的儿子。25 岁就是彼得堡科学院的数学教授，他最早的著作（1724）是解决黎卡提（1676－1754）方程

---

① 微分学中的罗比达法则是：

“若函数 $f(x)$、$g(x)$ 在点 a 的邻域内有定义，且

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$，$\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$，（或∞）

$f'(x)$、$g'(x)$ 存在，且 $g'(x) \neq 0$；

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$　（A 或∞），

则　$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$y' = A(x) + B(x)y + C(x)y^2,$$

以后他又是医学、形而上学、自然哲学教授，他的主要工作在流体力学和弹性力学方面。1739 年丹尼尔开创了研究声波在空气中的传播，并把它表述为波动方程。

尼古拉Ⅲ是约翰的长子，1725 年在彼得堡提出一个概率论问题，后来称为彼得堡问题，可惜第二年就去世了，年仅三十一岁。

伯努利家族二百多年来在数学上的贡献，为数学分析（微积分、级数论、函数论、微分方程、积分方程、变分法、泛函分析等学科的总称，也叫做分析数学）奠定了基础，他家之所以有此功绩，主要是有一个好的家风、刻苦钻研之风，讨论挑战之风，力争上游之风。

8　欧拉

瑞士的欧拉（Euler，1707～1783）和阿基米德、牛顿、高斯是世界上有史以来贡献最大的四位数学大师，他们有一个共同点，就是在创建数学理论的同时，还运用数学作为工具解决天文、物理、力学等方面的实际问题，并力图探究宇宙的奥秘，也就是通过发展数学来认识世界、改进世界。

欧拉的父亲保罗欧拉是一位数学家，也是欧拉的老师，欧拉从小得到父亲的教育，对数学很有兴趣，13 岁入巴塞尔大学，由于勤奋和才能，受到约翰伯努利教授的赏识，欧拉同约翰的儿子尼古拉和丹尼尔也成为挚友。

欧拉 19 岁时写了一篇关于船桅的论文，获得巴黎科学院的奖金。1725 年丹尼尔兄弟赴俄国，向沙皇推荐欧拉，欧拉 1727 年来到彼得堡。1733 年丹尼尔回巴塞尔，欧拉接替他任彼得堡科学院数学教授，年仅 26 岁。

欧拉从 19 岁起开始写作，涉及到的每一个数学部门，他都有新的创造。如初等几何的欧拉线（三角形的外心、垂心、重心、九点圆心共线），多面体的欧拉定理

$$E + 2 = V + F。$$

立体解析几何的欧拉变换公式，四次方程的欧拉解法，数论中的欧拉函数，微分方程的欧拉方程

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots - p_{n-1} x y' + p_n y = 0,$$

解法中的欧拉代换 $x = e^t$，级数论的欧拉常数，复变函数论的欧拉公式，变分法的欧拉方程，现在许多常用的数学符号也是起源于欧拉，如 $\sum$ 表示和，i 表 $\sqrt{-1}$，e 表自然对数的底等等。

1741 年欧拉应普鲁士腓特烈大帝的邀请，任柏林科学院物理数学所所长达 20 多年，1766 年应俄国沙皇之请重返彼得堡。1767 年双目失明，1771 年又遇彼得堡大火，欧拉的著作和研究成果全部被焚，他没有倒下，发誓要把损失夺回

来。他仍然坚持写作，凭记忆和心算进行研究，由他的的长子 A 欧拉（1734～1800）教授笔录，写出了许多新的专著，直到去世，长达 17 年之久。

欧拉的心算能力是惊人的，他的两个学生把一个复杂的收敛级数的前 17 项加起来，算到第 50 位数字相差一个单位，欧拉为了确定究竟谁时，凭心算把错误找了出来。法国天文、物理学家阿拉哥说：“欧拉的心算好像一点也不费力，正和人呼吸空气、老鹰乘风飞翔一样。”

欧拉为人品德高尚，法国青年数学家拉格朗日[1]（Lagrange，1736－1813）从 19 岁起，和欧拉通信，探讨“等圆问题”，奠定了变分法的基础。1759 年欧拉在回信中盛称拉格朗日的成就，并压下自己这方面的作品暂不发表，使年青人的工作得以发展和流传，此事传为佳话。称得上是数学界的“伯乐”。

9 拉普拉斯

拉普拉斯（1749～1827）与拉格朗日、勒让德（Legendre，1752～1833）称为法国数学界的三 L。拉普拉斯一生贡献很多，在分析概率论、天体力学和宇宙体系论三个方面的成就，使他成为历史上数理科学最享盛誉的科学家。他的研究工作的特点：第一是深度和广度并进；第二，强调应用。他认为数学与科学是不可分的，要用数学发掘科学的奥秘，要在应用中发展数学。实际上当时的数学家大部分也是科学家。

拉普拉斯 19 岁考入里昂大学艺术系，后转入神学系，教师们发现他有特殊数学才能，鼓励他学数学。1768 年他放弃了硕士学位，到巴黎科学院找数学家达朗贝尔（D'Alembert，1717～1783），达朗贝尔给拉普拉斯一个数学题，要他一周后再来，他一夜之间就完成了，达朗贝尔又给一个关于打结的难题，他当场就解出来了。达朗贝尔很赏识他的才能，推荐他到科学院任职，那时保守势力强大，不愿接受这个没有学位的 19 岁的青年，达朗贝尔给他安排另一个工作，等待机会进入科学院。

1770 年拉普拉斯完成了出色的论文“曲线的极大和极小研究”，此后三年内写出 13 篇论文，涉及极值、差分方程、循环级数、机会对策、微分方程的奇异解、行星轨道倾角的变化、月球运动理论、卫星对行星运动的摄动、行星的牛顿运动理论等。逐渐受到科学院的重视。到 1773 年孔多塞（Condorcet）出任巴黎科学院执行秘书，才得以通过，接受拉普拉斯入院成为副院士。此后他全力对数学、力学和天文学进行研究，声振寰宇，1785 年选为院士。

1789 年法国大革命期间，拉普拉斯学术地位日益增高，1795 年出任巴黎科学院副院长，1796 年任院长，1799 年任拿破仑帝国内政部长，1803 年任元老院

---

[1] 微分中值定理“若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，则在 (a,b) 至少有一点 ξ，使

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)$$

就是拉格朗日提出的。

议长，尽管他参加了社会活动和组织工作，仍坚持研究、整理成果。1805 年前完成了历史性名著《宇宙体系论》和《天体力学》，1812 年出版了《概率分析理论》，给出了古典概率的定义，使概率论向公理化和公式化方向发展，为以后建立分析概率论打下了基础。他还给出各种平均值的定义和概念，不仅在天文学中得到应用，也为统计学和高斯建立最小二乘法创造了条件，他建立的常数变易法（拉格朗日也独立地建立此法），开始时主要作行星运动方程的近似解法，后来变成常微分方程的一种通用解法。他晚年提出为解常微分方程、偏微分方程、积分方程、差分方程的一种基本方法——拉普拉斯变换：

$$\pounds(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) \mathrm{d}t,$$

其中 s 为复数，但其实部为正，它的逆变换：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c^{+\infty} \pounds(s) e^{st} \mathrm{d}s$$

其中 C 为 S 平面上的某一闭路。此变换为以后众多数学家——傅里叶（Fouqier，1768～1830）、柯西（Cauchy，1789～1857）、泊松（1781～1840）、阿贝尔（1802～1829）、布尔、庞加莱（1854～1912）等的研究启航。拉普拉斯是 20 世纪"运筹微积"的先驱者之一。

拉普拉斯是伟大的唯物论者，他对宇宙体系的研究与天文学将来的进展，持以下的观点：

1）太阳系边界应比现在所知道的更远，还有更多的行星和卫星；

2）地球不特殊，其它行星、行星系中都可能有生物，有适于它们生存的环境；

3）太阳系规律应同恒星世界联系研究，太阳系和恒星都有起源；

4）对暂时无法解释的现象和规律，老实承认我们无知，不要为了自我安慰去找想像的原因来说明。他对牛顿不能解释行星和慧星的规律时认为是上帝创造，提出了批评，说牛顿陷入了歧途。

这些观点后来称为"康德－拉普拉斯的星云假说。"

10 高斯

高斯（Gauss，1777～1855）是德国著名数学家、物理学家和天文学家。少年时被认为是数学王子，十岁时数学老师布特拉出一道题：计算"1＋2＋3＋…＋99＋100"，高斯一眼就注意到

$$1 + 100 = 2 + 99 = \cdots = 50 + 51 = 101,$$

很快就回答

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100 = 50 \times 101 = 5050 \quad 。$$

高斯出生在德国布伦兹维克一个贫苦的家庭，祖父是农民，父亲做短工，舅舅腓特烈是工人，颇有才能，经常教高斯一些知识，对幼年的高斯影响很大。

高斯读小学时就很用功，家里没有钱买油点灯，他想办法拣些油脂的东西当灯油，在微弱的灯光下学习到深夜。

高斯遇到两个好老师，一个是布特拉，就是发现高斯不用连加而算出和来的数学老师。后来布特拉认为自己学识不高，不能提高这个天才般的学生，经常买些数学参考书送给高斯，鼓励他自学成才。

另一个老师是巴特尔斯（Bartels，1769～1836），比高斯大8岁，同高斯一起自学数学。后来是喀山大学教授。著名的俄国数学家罗巴契夫斯基（1792－1856）是他的学生。由于巴特尔斯的推荐，高斯得到一位公爵的资助，1795年进了格廷根大学。

高斯17岁就发现最小二乘法原理（1794），1809年把它写进《天体沿圆锥曲线绕日运动的理论》中。

高斯19岁（大学二年级）时发现并证明了数论中的二次互反律（又称为黄金律），他还给出了正十七边形的尺规作图法，这是欧几里得以来两千年未能解决的问题。格廷根大学在高斯去世后，为他建立了纪念像，它的底座是一个正十七边形棱柱。

高斯24岁时创立了行星椭圆轨道法，揭示了行星的运动规律。过去只知道已发现的金星、水星、火星、土星、木星服从“波德定律”（德国天文学家波德（1747～1826）于1772年整理的），理论依据还不清楚，也不能据此推断其它行星，天文学家查赫（1754～1832）根据高斯的方法，造了一个觅星表，预报星球的位置，终于找到了谷神星，它与太阳的距离和波德定律大致相符，显示了数学理论的巨大威力。

1801年高斯著《算术探究》奠定了现代数论的基础。他说：“数学是科学之王，数论是数学之王”，因而有人把哥德巴赫猜想说成是“数学皇冠上的一颗明珠。”

高斯在1816年就已获得非欧几何的原理，1824年给扎里努斯的信就已透露了这一成果，因高斯治学谨慎，没有发表。他还深入研究了复变函数，发现解析函数 $f(z)$ 沿闭曲线 c 的积分为零，即

$$\oint_c f(z)\mathrm{d}z = 0,$$

也没有发表，现在称为柯西——古萨[①] 基本定理。

1827年高斯出版《曲面的一般研究》，继欧拉、蒙日（Monge，1746～1818）

① 古萨（Goursat，1858～1936）法国数学家。

之后将微分几何大大推进一步，并确定了发展的基本方向。

1833年高斯和韦伯（Weber，1804～1891）发明了电磁电报，磁通量密度的单位，也以高斯命名。

高斯在1799年已经考虑复数的几何表示，到1831年才作出详细的说明。他用数偶（a，b）表示 $a+bi$，这样复数的和与积都可以用纯代数的方法来定义，而无需作几何解释。这一思想在1837年由爱尔兰数学家哈密顿（Hamilton，1805～1865）发表出来。

高斯很重视代数基本定理，曾给出四个严格证明。第一个是他的博士论文（1797年仅20岁，1799年发表），第四个是1850年。代数基本定理这一名称也是他提出来的。

高斯从一个农村的贫苦孩子成为世界上可数的伟大的数学家，除了他自己的勤奋刻苦外，没有像伯乐一样的腓特烈舅舅、布特拉和巴特尔斯老师，也就没有这位数学大师。

11 柯西

微分学中有个中值定理："设函数 $f(x)$、$g(x)$ 满足

在 $[a, b]$ 上连续，

在 (a, b) 内可导，且 $g'(x)=0$，

则在 $[a, b]$ 内至少有一点 ξ，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\quad a<\xi<b。$$

就是以柯西命名的微分中值定理。

柯西（Cauchy，1789～1857）法国人，是历史上有数的伟大数学家，幼年在父亲的教育下学习数学。拉格朗日与拉普拉斯常和他父亲来往，曾预言柯西日后必成大器。1805年柯西进入理工科大学学习工程，拉格朗日和拉普拉斯劝他专攻数学，年仅27岁的柯西1816年成为理工科大学的数学教授。

1830年法王查理十世被逐，路易腓力普称帝，柯西拒绝作效忠宣誓，被革去职位，出走国外。1848年政变，成立法兰西第二共和国，柯西又成为理工科大学教授。1852年又政变，恢复帝国，仍须效忠宣誓，唯独柯西和阿拉哥教授可以免除宣誓。

柯西才华过人，具有广泛的兴趣。熟悉诗歌，并有著述。在数学方面，他遍及所有领域，写的论文，超过700篇，仅次于欧拉。他全集有26卷，包括数学的所有分支。他发展了行列式理论，建立了微分方程的基本定理，在复变函数基本理论方面，提出了柯西——黎曼方程

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y},\qquad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

1821 年提出极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义，称为柯西定义，把极限过程用不等式来刻画，使无穷的运算化为一系列不等式的推导，即极限概念的算术化，是牛顿、莱布尼兹所没有完成的工作，至今还沿用柯西的极限定义。

由于柯西的极限定义，对无穷小量和无穷大量有严格的刻画，使连续、导数、微分、积分、无穷级数的和与运算等概念，也建立在较坚实的基础上，使过去对分析基础的一些疑虑和非难也得到一定的澄清。以后经魏尔斯特拉斯（Weirstrass，1815～1897）、康托尔（Cantor，1845～1918）、戴德金（Dedekind，1831～1916）的研究，奠定了数学分析的理论基础。

12 阿贝尔

阿贝尔（Abel，1802～1829）是挪威的一位最出色的也是最不幸的青年数学家，父亲是乡村牧师，家境贫穷，少年时期没有受到很好的教育，15 岁时遇到一位好老师洪保（Holmboe，1795～1850）耐心细致地教育培养，发现阿贝尔勤学好问，接受能力极强，对数学兴趣很浓。指导阿贝尔自学当代名家的数学著作，写的学习心得都超出了原著。洪保预言，阿贝尔必将成为世界上第一流的数学家。

1824 年阿贝尔发表著名论文《论代数方程》，证明一般五次方程的不可解性，以后称为阿贝尔定理，结束了数学界二百多年的疑虑，开辟了近世代数方程论的进程。

1825 年阿贝尔将论五次方程不可解的论文寄给高斯，没有得到高斯的回复。

1826 年阿贝尔在德国遇到一位知音克列尔（1780～1855），他们创办了《理论与应用数学杂志》（又称克列尔杂志）。头三卷发表了阿贝尔 22 篇论文，阿贝尔的划时代论文也使杂志誉满全欧。

1828 年勒让德给雅可比（Jacobi，1804～1851）的信中说："我满意地看到两个年轻数学家（指阿贝尔和雅可比），如此成功地开辟了分析的一个分支。它很久以来是我喜爱的领域，但在我自己的国家——法兰西中它都没有受到应有的重视。"

阿贝尔 1826 年将论文《关于很广一类超越函数的一个一般性质》（包含阿贝尔大定理）寄给巴黎科学院，科学院委托勒让德和柯西评价，两人都没有表态，阿贝尔去世后，科学院才找到这篇论文，于 1841 年发表。当时数学界对高斯、柯西和勒让德三位学者对阿贝尔论文的失误颇有非难。

阿贝尔在欧洲大陆没有找到工作，经济困窘，迫不得已，回到挪威，在贫病交加中郁郁去世，才 27 岁（1829.4.6），4 月 8 日克列尔来信通知他已被柏林大学任命为数学教授，而阿贝尔已结束了他这短暂而光辉的一生！数学家查理士尔米特（Hermite，1822～1901）说："阿贝尔留下了一些思想、文稿，可供数学家们工作 150 年。"

阿贝尔研究数学，从 15 岁到 27 岁才 12 年，就作出了杰出而惊人的成就，在科学史上是空前的，但不是绝后的，这个后来人就是法国的伽罗瓦。

15　伽罗瓦

伽罗瓦（Galois，1811～1832）出身于巴黎近郊一个富裕的家庭，他短暂的一生充满了不幸，景况比阿贝尔更惨。21 岁时在一次决斗中被人击毙，遗留下不朽的杰作，开创了代数学一门崭新的领域——群论。被称为“法国的阿贝尔”。他继承并开拓了阿贝尔的研究，是世界数学史上一对“难兄难弟”。

伽罗瓦小时在母亲的辅导下学习，不见重于老师，被说成是“笨蛋”，12 岁进入巴黎一所有名的中学，并开始研究数学，17 岁遇到一位数学老师里沙（Richard，1795～1849），里沙数学水平很高，别人要他写书，他却把全部精力倾注在学生身上。法国有好几位杰出的数学家，如罗巴契夫斯基，都出自他的门下，里沙认为他的事业在学生身上，学生的成就，就是他最高的奖赏。

伽罗瓦在里沙的指导下研究代数方程。他认真研究了勒让德、高斯、柯西和阿贝尔的著作。17 岁进入法兰西师范学院数学系，一年级发表了 4 篇论文。1829 年把方程论的两篇文章送给法国科学院，科学院请柯西审阅，柯西把它遗失了。1830 年又送一篇给科学院，科学院请傅里叶（Fourier，1768～1830）审阅，不久傅里叶就去世了，文章也没有下落。

1831 年伽罗瓦就他的研究写成《关于用根式解方程的可能性条件》送给数学教授泊松，泊松认为难以理解而退回。

1830 年法国革命，把查理十世赶走，伽罗瓦公开批评师范学院对革命不支持而被开除。1831 年他两次因政治罪被捕，在狱中完成了很多篇杰出的论文；1832 年获释不久，因为政治和爱情的纠葛在一次决斗中被杀，年仅 21 岁，他从事数学研究只有短短的 5 年。

伽罗瓦参加决斗的先两天晚上，他预料自己难以摆脱死亡，连夜给朋友写信，仓卒间扼要地写出平生对数学的研究心得，并附论文手稿。他在给朋友舍瓦利叶（Chevalier）的信中说：“我在分析方面作出一些新发现，有些是关于方程论的，有些是整函数的……公开请求雅可比或高斯，不是对于这些定理的正确性，而是对于它的重要性发表意见。其次，我希望将来有人发现消除所有这些混乱对他们是有益的。”

按照伽罗瓦的遗愿，舍瓦利叶将他的信发表在《百科评论》上（1832）。

伽罗瓦的研究工作，可以说是阿贝尔的继续。阿贝尔认为五次和五次以上的方程不能用根式求解，但仍有很多特殊的方程，如二项方程 $x^p=a$（p 为素数），

以及阿贝尔方程① 都可用根式求解。现在的任务是确定那些方程可用根式求解。这个任务由伽罗瓦承当起来了。

伽罗瓦还提供了可作图的一个判别法。用圆规直尺作图的每一步都需要找一个交点，可能是属于两条直线的，或者是一条直线和一个圆的，或者是两个圆的。用代数术语说，意味着同时求解两个线性方程，或一个线性与一个二次方程，或两个二次方程。我把这种模式称为双规迹模式②。

给了一个作图题，首先要建立一个相应的代数方程，它的解是所求的量。如求作正十七边形，相应的方程是

$$x^{17}=1,$$

它的不可约方程是

$$x^{16}+x^{15}+\cdots+x+1=0。$$

用伽罗瓦理论的术语说，一个方程能用平方根求解的必要和充分条件是方程的伽罗瓦群的阶是2的方幂。

伽罗瓦证明了素数 p 边的正多边形能用尺规作图，当且仅当素数 p 具有形式

$$2^{2^n}+1,$$

即当 p 为费马数③

$$p=3,\ 5,\ 17,\ 257,\ \cdots$$

时可作；而当

$p=7，11，13，19，23，29，31$ 时则不可作。

伽罗氏理论还能证明：三等分任意角，二倍立方体的问题是不可解的。

1846年刘维尔（Liourille，1809～1882）在《纯粹与应用数学杂志》上出版了伽罗瓦的部分文章，包括《论方程的根式可解性条件》。

1870年约当（Jardan，1838～1922）在《置换和代数方程专论》中阐明了伽罗瓦理论。伽罗瓦用根的置换或排列的概念通过置换的集合而建立了群论这个近世代数的分支。

群论的出现，使代数学从古典代数以方程为中心转变为以研究代数结构的性质为中心，向着代数数论、超复数系、线性代数、环论、域论等方向发展，伽罗瓦如此短暂匆忙的一生，给数学库所增添的光辉，好似“风乍起，吹皱一池春水”。五载拼搏，使代数面目改观，令人赞叹不已。

---

① 如果一个方程的全部根都是其中一个根的有理函数，就是说，若全部根为 x_1，$R_1(x_1)$，$R_2(x_1)$、…，$R_{n-1}(x_1)$，其中 R_i 是有理函数，则称此方程为阿贝尔方程。

② 参看言文学《数学·数学家与数学思维》，湖南科学技术出版社。

③ 见§5.4分图。

14 魏尔斯特拉斯

德国19世纪出了一位出色的中学教师，自学成材，一跃而成为世界著名的数学家，他就是魏尔斯特拉斯（Weierstrass，1815～1897）。

他的父亲是一名政府官员，对子女专横，魏尔斯特拉斯11岁丧母，父亲另娶，从小没有得到家庭温暖。他富于思考，聪慧过人。1834年考入波恩大学学经济管理，但他的兴趣在数学，四年大学，没有获得学位，父亲大为不满，为了生活，到一所中学任教，在附近一所大学旁听数学。他刻苦钻研，日以继夜，1848年发表划时代论文《关于阿贝尔积分论》。1854年又发表《阿贝尔函数论》，公认为是阿贝尔、雅可比的后继者。他在中学教书15年，课程很忙，是以牺牲健康为代价从事数学研究的。1855年升为高级教师，1856年柏林大学聘为副教授，并当选柏林科学院院士，1864年任柏林大学教授。在此期间他着手建立数学分析基础（含复分析），并进一步研究阿贝尔函数论与椭圆函数论，1871年任柏林大学校长。

1870年他与学生科瓦列夫斯卡亚友善，培养她取得了学位。1888年科瓦列夫斯卡亚以刚体绕定点运动的研究获得巴黎科学院大奖，对魏尔斯特拉斯是极大慰藉。1890年她的去世，给魏尔斯特拉斯以沉重打击，他烧毁了来往的信件，大病不起。魏氏终身未娶，于1897年与世长辞。

魏尔斯特拉斯是数学分析算术化的完成者（包括 ε-δ 语言）。解析函数论的奠基人，他治学严谨，总是推迟发表自己的文章，反复推敲所写的观念、理论和方法，直到认为已达到完善的地步为止。他很有诗才，他说，如果一个数学家不是某种程度上的诗人，他就不会成为一个完整的数学家。他的数学艺术，受到学生高度的推崇。他桃李满天下，后来有近百位学生是大学的教授。学生尤格说：魏尔斯特拉斯在其连续性课程中自下而上地构筑了完美的数学大厦。其中任何想当然的、未经证明的东西没有立足之地。

15 罗素

罗素（Russell，1872～1970）是英国著名的数理逻辑学、数学基础学家、哲学家和社会活动家。他出身贵族家庭，祖父约翰罗素曾两次出任英国首相，罗素小时父母见背，与祖父母共同生活，祖母是一个贵族的虔诚教徒，具有强烈的道德信念和宗教信仰，常告戒罗素："不能追随众人去做坏事，罗素终身遵循不违。少年时没上学校，接受家庭教师的教育，11岁就掌握了欧几里得几何学，是他智慧发展的重要起点。

1890年考入剑桥大学三一学院学习数学和哲学，结识了怀特海（Whitehead）、穆尔（Moore）和麦克塔格特（Mctaggart），受他们的影响很大，1895年任三一学院研究员，1897年著《论几何学的基础》。

1900年罗素到巴黎参加国际哲学会议，见到数理逻辑学家皮亚诺（Peano）、

弗雷格（Frege），并聆听皮亚诺的讲话，是他一生成就的转折点。罗素意识到数理逻辑对于研究数学基础的重要性，1903 年他出版了《数学的原理》，1919 年出版了《数理哲学导论》。

当时有些数学家不重视逻辑，正如德摩根（De Morgan，1806～1871）所说："数学家对于逻辑不如逻辑学家对于数学那样关心。数学和逻辑是精确科学的两只眼睛，数学派闭上逻辑眼睛，逻辑派闭上数学眼睛，各自相信，一只眼睛能比两只看得更好。"实际上，数学和逻辑是不可分离的。皮尔斯（1809～1880）曾说："逻辑是不可战胜的，因为要反对逻辑还得使用逻辑。"

1901 年罗素受康托尔证明没有最大的基数方法的启发，发现了著名的"罗素悖论"，罗素在《我的哲学的发展》中写道："使我考虑不是自己的项的那些类？好像这些类一定成一类。我问自己，这一个类是不是它自己的一项，如果它是自己的一项，它一定具有这个类的分明的特性，这个特性就不是这个类的一项。如果这个类不是它自己的一项，它就一定不具有这个类的分明的特性，所以就一定是它自己的一项。这样说来，二者之中无论哪一个，都走到它相反的方面，于是就有了矛盾。"1902 年罗素将这个悖论写信告诉弗雷格，弗雷格回答说，罗素悖论的发现使他惊愕之极，认为算术的基础发生了动摇。①

以后罗素悖论常以其它通俗而生动的形式出现，如理发师悖论：有个乡村小镇，只有一个理发师，他宣称，只给不给自己刮胡子的人刮胡子。请问这个理发师的胡子该谁刮？

罗素著述等身，誉满全球，主要著作有：《神秘主义和逻辑》（1918）、《心的分析》（1921）、《物的分析》（1927）、《意义和真理研究》（1940）、《人类知识：它的范围和限度》（1948）等，1920～1921 年访问过中国，1938～1943 年迁往美国，对中美哲学界都有影响。1944 年返回剑桥，直到去世。20 世纪 50 年代后他转向国际政治，反对核战争，主张核裁军。1908 年当选英国皇家学会会员，1949 年任英国科学院荣誉院士，1950 年获诺贝尔文学奖，称他为"当代理性和人道的最杰出的代言人之一，自由思想的无畏战士。"

16 希尔伯特

希尔伯特（Hilbert，1862～1943）出身于东普鲁士一个法官家庭，母亲玛丽亚颇有数学、哲学和天文学素养，希尔伯特从小受到母亲的启蒙教育，喜爱数学，各门成绩优等，数学获最高分"超"。现代科学研究表明：人的脑细胞总量的 70%是在 0～3 岁时形成的，6～7 岁达到 90%；美国心理学家、教育家布鲁纳早期教育实验表明：0～4 岁的儿童可以达到 17 岁时智力水平的 50%，母亲的早期教育对希尔伯特的一生起到十分重要的作用。

---

① 这里使用的是二值逻辑，它不是逻辑的全部。

1880年希尔伯特将进入柯尼斯堡大学，跟韦伯（Weber，1842～1913）学数论、函数论和不变量理论。他的博士论文是证明π的超越性的林德曼（Lindemann，1852～1939）指导的。在大学期间，他与闵可夫斯基（1864～1909）和胡尔威茨（1859～1919）结下了深厚友谊。希尔伯特回忆说："在日复一日无数的散步时刻，我们漫游了数学科学的每个角落；我们的科学，我们爱它超过一切，它把我们联系在一起。在我们看来，它好像鲜花盛开的花园。在花园中，有许多踏平的路径可以使我们从容地左右环顾，毫不费力地尽情享受，特别是有气味相投的游伴在身边。但是我们也喜欢寻求隐秘的小径。发现许多美丽的新景。当我们向对方指出来，我们就更加快乐"（《希尔伯特全集》）。

大学毕业后，希尔伯特赴莱比锡、巴黎、柏林游学，参加了克莱因（Klein，1849～1925）的讨论班，结识了庞加莱（Poincare，1854～1912）、约当（1838～1922）、皮卡（Picard，1856～1941）、埃尔米特（1822～1901）、克罗内克（Kronacker，1823～1891）等著名数学家，大有"与君一夕话，胜读十年书"之感，可见"学要好伴"的重要性。

1886年希尔伯特任柯尼斯堡大学讲师。1888年研究不变量理论，解决了著名的"哥尔丹（Gordan）问题"。1892年升副教授，次年升正教授，1895年任格庭根大学教授，直到1930年退休。

1891年夏他在哈雷自然科学家大会上听了维纳（Wiener）"论几何学的基础与结构"的讲演。1894年他讲过"几何基础"课，1898年讲过"论无限概念"，终于导致了1899年发表著名的《几何基础》，创立了现代公理化方法。他在这本书的导言中说："建立几何的公理化和探究它们之间的联系，是一个历史悠久的问题；关于这问题的讨论，从欧几里得以来的数学文献中，有过难以计数的专著，这问题实际就是要把我们的空间直观加以逻辑的分析。""本书中的研究，是重新尝试着来替几何建立一个完备的，而又尽可能简单的公理系统；要根据这个系统推证最重要的几何定理，同时还要使我们的推证能明显地表出各类公理的含义和个别公理的推论的含义。"

希尔伯特公理系统是从三类不定义的对象（点、线、面）和若干不定义关系（关联、顺序、合同）开始的。他提出20条公理，分为5组：关联公理8条，顺序公理4条，合同公理5条，平行公理1条，连续公理2条。公理系统应满足三个基本要求：

（1）相容性（无矛盾）；

（2）独立性（不允许有多余的）；

（3）完备性（不能再添任何公理）。

这个公理化系统，逐渐渗透到几乎所有的纯数学领域。

1927年，希尔伯特、冯诺依曼（Von Neumann，1903～1957）和诺德海姆

(Nordheim) 合著的《论量子力学基础》推动了量子力学公理化，也是物理学公理化的典范。

1917 年以后，由于集合论悖论和直觉主义的发展危及古典数学的成就，希尔伯特转向对数学基础的研究。这年 9 月他向苏黎世数学会作的"公理化思想"的讲演，公布了"证明论"的构想，希尔伯特认为：人们必须通过符号形式的程序来进行数学语句的公式表述，并用形式的程序来表示推理，数学证明便由这样一条公式的链所构成。这实质上就是科学数学化的构想。

1900 年希尔伯特在巴黎国际数学家大会上作了"数学问题"的著名讲演，是他根据 19 世纪数学研究的成果与发展趋势而提出的 23 个问题，被称为"希尔伯特问题"见 § 5.10，这些问题涉及现代数学的大部分领域，它们的解决，对 20 世纪数学产生了持久的影响。

数学家们给后人的启示

我们前面介绍中国数学家的轶事时曾经指出，他们所以成名主要是勤奋、理想、意志、才华。上面介绍的西方数学家，又再一次证实了这个结论的正确性，这对于今日的学者，是头等重要的启示。我们后人，特别是青年要引以为训的还有以下几点：

一是爱国上进精神。如华罗庚、江泽涵、陈省身、阿基米德等。我国文化之所以长胜不衰，最关键的因素就是我中华民族有爱国上进的传统。

二是勤奋思考、求实创新的精神。如笛卡尔、牛顿、J·鲍耶、罗巴契夫斯基、希尔伯特等。有人说：事业源于勤奋，发明来自思考，这是颠扑不破的真理。

三是对学生要热情提携、甘当伯乐，如熊庆来之于华罗庚、华罗庚之于陈景润、洪堡之于阿贝尔、布特拉之于高斯、里沙之于伽罗瓦、拉格朗日之于柯西、达朗贝尔之于拉普拉斯等，我国历史上是崇尚伯乐精神的，22 岁的苏轼（1035～1101）在汴京应试，主考官欧阳修（1007～1072）读了他的殿试文章"刑赏忠厚之至论"后说，"不觉汗出，快哉快哉！老夫当避路，放他出一头地也。可喜可喜！三十年后，世上人更不道着我，未来的文坛，将属于苏轼"，后世传为佳话。

四是学风要严谨，知识要广博，基础要坚实，态度要谦虚。胡适说，"为学犹如金字塔，要能广博才能高，""泰山不让土壤，故能成其大，河海不择细流，故能就其深"，如伯努利家族的家风学风，苏步青的重视基础，沈括、朱世杰、莱布尼兹的广识多才等。

五是自学成才。这三十多位数学家基本上都是自学成材的，没有自学不可能成材。自学成材的关键因素是基础、思维、方法、敢超、自觉和自控（意志和毅力）。如华罗庚、阿贝尔、伽罗瓦等。魏尔斯特拉斯以一个中学教师，依靠自学，终成大器。自学的能量是惊人的，伽罗瓦从 17 岁到 21 岁，才 5 年时间，竟一跃

而成为世界一流数学家，有志者事竟成。

“青出于蓝而胜于蓝”这是历史的规律，这里提的“敢超”是要敢超前人的事业，笛卡尔决心放弃欧几里得几何，是为了研究另一种几何（解析几何），决不是对欧几里得的不尊重。敬老尊贤，谦虚谨慎，永远是我国的优良传统。

此外，人生不可能是一帆风顺的，要学习欧拉善于处逆境，黑暗中见光明。牛顿、伽罗瓦小时并不聪慧，但有好的学习方法，反复实践，敏锐观察，刻苦钻研，精心思索，“涉浅水者见虾，其尤甚者见蛟龙”，不要迷信才华。聪明才智，是后天培养出来的。笛卡尔、希尔伯特等广交朋友，行要好伴，这些经验都是值得借鉴的。我们更要学会数学思维与方法。学会思维，掌握方法，就能长智慧、育人才、出成果，为祖国多作贡献，自己亦与有荣焉。

第二篇

医学数学化的构架

1978年来党的“十一届三中全会”的东风，我从湖南师范学院来到湖南医学院教研究生高等数学。在此之前我一直教数学，教中学时教学目标很明确，打基础、升大学，教大学也较明确，为师范教育服务。来到医学院，数学如何为医学服务？胸中无底。开始时，把精力放在研究生上，摸他们的底。过去学得怎么样？将来学了干什么？后一个问题，研究生也搞不清楚。不得已，从图书资料里找答案，Jetarces & Snoedden 的书：An infroduction to the mathematics of medicine and biology [Norty – Holland Publishing grounaps Amsterdam, 1960]帮我解决了数学中部分为医学服务的问题。在联合国教科文组织1983年的调查报告中明确了“目前研究工作的特点之一是各门学科的数学化(mathematizing)，它已成为科学发展的历史潮流”。这使我认识了我的任务要急学生之所急，使他们所学的数学能为医学科研服务，能有条件走上“医学数学化”之路，使我国医学科研、医疗诊断更上一层楼。

教学目标明确之后，我必须先当学生，学模糊数学与生物数学。结合它们的应用来学医。我知道自己没条件学医，只能遇事请教研究生，懂一点皮毛而已。这里先谈生物数学。

1 生物数学

我认真地阅读了《生物数学概论》(杨继利)和前面提到 Defarces 的书,其中有不少医学例子,对数学很有用。以后应中国统计编辑部之约写了《生物数学简介》一文,也可说是我的学习心得。此文刊载在《中国卫生统计》(1988 年第五卷 2、3、4 期)上。

《中国卫生统计》编者按:"此文介绍了生物数学这门边缘学科的兴起和发展。内容虽不完全属于卫生统计学的范畴,但与卫生统计学有一定的联系,对卫生统计工作者来说既有知识性,又可开阔视野。本刊将分三次连续刊出此文。"

1.1 生物数学简介

数学是一门富有逻辑的严格性、高度的抽象性和应用的广泛性的科学。实际上它的生命力归根结蒂还在于应用。17 世纪以来数学找到一门"知己"(或载体)——物理学,不仅发展了物理学,使数学与物理学成为上两个世纪的带头学科,同时也壮大了数学自身,发展了经典数学和统计数学。到 20 世纪数学又找到了另一位"知己"——生物学,看来有希望使生物学成为 21 世纪的带头学科。模糊数学(Fuzzy mathematics)、生物数学(Biomathematics)也应运而生。这里简略介绍生物数学。抛砖引玉,希望得到数学界、生物界以及医药卫生界同志的指正。

1.1.1 通论

所谓数学危机

世界上有些数学家、科学家、思想家论述数学的重大发展(或转折点)时有所谓数学危机(mathematical crisis)的说法。有三次危机说(经典说),后来有四次危机说。

经典说认为第一次危机是公元前 400 年 Hippasus 发现不可通约性,对古希腊的数学观点有很大的冲击。这次"危机"导致无理数的出现。第二次危机是无穷小量的矛盾引起的,反映数学内部有限与无穷小的矛盾、连续与离散的矛盾,出现了 Zeno 悖论(运动不存在),导致微积分的诞生。第三次危机由 Cantor 集合论引起,出现了罗素(Russell)悖论,导致数学基础的研究,诞生了公理体系与数理逻辑的兴起。

近代有所谓四次危机说,也可以说是数学发展的重大里程碑。第一次危机指

初等数学只能反映简单的数量关系而不能反映变化率，导致了笛卡尔的解析几何与牛顿、莱布尼兹微积分的诞生。第二次危机暴露数学只能反映确定现象而不能反映随机现象和统计规律，导致概率论的诞生。第三次危机暴露二值逻辑的局限性与反映模糊现象的局限性，导致了模糊数学的诞生。第四次危机暴露数学不能正确反映生命现象与人脑思维规律，导致了生物数学的发展。经典数学、统计数学、模糊数学与生物数学的出现确实反映了数学发展的四个里程碑。

生物数学的兴起

19世纪以前，数学与生物学很少联系。恩格斯在《自然辩证法》中说数学在生物学上的应用等于零。以后由于生物学已从定性研究发展到定量研究，没有数学很难前进；而数学又面临"第四次危机"，提出了生命现象与思维规律的描述问题，两相情愿，走到一起来了；特别是数学化方法在物理学、天文学、化学等方面作出了成绩，取得了经验，自然地向生命科学、社会科学渗透，就这样水到渠成地产生了一支新型的边缘学科——生物数学。

1901年Pearson创办《生物统计学》(Biomertrika)杂志，开创了统计数学在生物学上的应用研究。

1924年Lotka著《物理生物学原理》，把物理方法引进生物学，实际上是生物数学的起源。

第一次世界大战时意大利生物学家D'Ancona发现亚得里亚海湾鱼群间的食物链问题(人吃鱼，大鱼吃小鱼，食鱼动物吃大鱼，构成一个循环消长的系统)，请教数学家Volterra(1860~1940)。Volterra于1926年研究出描述捕食生态关系的数学模型。1931年又写成《生存竞争的数学原理》。这是第一本生物数学的专著。

1939年，N.Reshevsky创《数学生物物理学通报》杂志(1972年Reshevsky把它改名为《数学生物学通报》)，把数学物理方法引入生物学的研究。

1956年，Lotka的《物理生物学原理》再版时改名为《数学生物学原理》，把生命现象的研究转化为对数学模型的研究。

由于数学对生物学的渗透，生物学的研究从定性的描述性的水平，引向定量的精确的高水平，对生物学的发展起了巨大的影响。过去物理学由于数学的渗透，在16~18世纪曾是带头的学科，促进了科学技术和生产的发展，目前生物学与数学的渗透，日益显示出生物技术、生物工程的威力，有可能在21世纪使生物学成为带头学科。Roger Bacon有句名言："数学是科学大门的钥匙。"Whitehead也说："数学是搞清楚世界上数量关系的智力工具。"数学与生物学的结合，使数学从非生命科学转向生命科学。这一重大发展，使数学成为名副其实的"科学的皇冠"，成为一切科学的基础和工具。

生物数学的特点

为什么数学很早就进入了物理学、天文学、化学等学科，而进入生物学却如此

之晚、如此之难呢？对生物现象的数学化大体上有以下五种困难，传统数学不加改进是很难做到的。

(1)生物现象以大量重复和周期循环的方式出现，受到许多随机因素的干扰；

(2)生物现象受着多种特性的制约，不适于运用舍弃次要因素、突出主要因素的办法，不适于用片面的孤立的机械的研究方法；

(3)生命物质的结构与生命活动的方式，往往是不连续的，甚至是突变的，如遗传性、变异性、亲缘关系、生物的分类、生物体内组成蛋白质的成份、细胞的图象、植物叶片的形状等都是离散的，而经典数学基本上是研究连续的情况；

(4)生命现象存在着更多的模糊性，从这些模糊现象中寻求精确的或近似的规律，经典数学对此是无能为力的；

(5)生物现象十分复杂，出现无法用数值表示的特性，如昆虫的翅分直翅、膜翅、鞘翅、鳞翅，植物的花冠分蝶形、唇形、舌形。生物体内组成蛋白质的各种氨基酸，都不能用实数来表示，简称非数值特性，这一困难涉及到数学的根基。

生物学的这五种特性：随机干扰性、多因素制约性、离散性与突变性、模糊性、非数值性，妨碍着它与数学的结合。作为新型的生物数学正是突破这些"封锁线"才艰难地成长起来的。

概率统基计方法可能克服第一种随机干扰性的困难；系统分析和网络分析使生物的多种特性在相互联系的水平上进行综合分析研究，可能克服第二种多因素制约性的困难；二元不连续特性，如脊椎动物与无脊椎动物、兴奋与抑制，可用布尔代数描述；多元不连续特性，可用模糊数学描述；离散的图象可用拓扑学和图论来描述；离散现象与突变现象可作离散数学与突变论(Thom: Catastrophe theory, 1968)来解释，从而可能克服第三种困难；模糊数学可用来克服第四种困难；集合与映射可以建立非数值特性的事物与特定实数的映射(或集合关系)，从而可能克服第五种困难。

当然生物现象十分复杂，数学并非万能，生物数学也刚破土而出，还有许多困难摆在前面。过去的经典数学、统计数学、拓扑学，新的图论、网络分析、系统分析、离散数学、模糊数学、突变论等都是生物数学的基础和工具。Hermann Hankel(1839～1873)曾说："在大多数科学里，一代人要推倒另一代人所修筑的东西，一个人所树立的另一个人要加以推毁。只有数学，每一代人都能在旧建筑上增添一层楼。"生物数学称得上是"泰山不让土壤，故能成其大，河海不择细流，故能成其深"，可谓集数学之大成了。

1.1.2 生物数学基本内容举例(上)

生物数学是研究生物现象数学化的一门边缘学科，内容广泛，分支繁多。人们正探索用新的概念来认识生命现象的本质。科学家提出的许多新的观点，如量子

生物学的观点，生物信息论的观点，系统控制论的观点，耗散结构的观点，它们都需要将生物现象数学化，要求精确的数值计算和数学的逻辑推理等。对生命现象的本质揭露得越深刻，使用的数学知识将越多，科学性也越强。因此生物数学将出现更多的流派，如生物统计学、生物信息论、生物控制论、生物系统学、生物工程、数量遗传学、群体遗传学、数量生态学、数量分类学、数量生理学、生物种群学、生长动力学、酶动力学、生物流体动力学、造血细胞动力学等等。

由于生物数学所研究的对象是有机事物，有人在分类时把它称为有机的数学，而把经典数学称为无机的数学。也有人把数学在应用上的发展分为三个层次：第一层次是无机系统，指微积分、微分方程、概率论等；第二层次是生命系统，指生物

该药物从体内消除一半所需时间为

$$t_{1/2} = \lg 2 / m \lg e = 4.93\ (\mathrm{h});$$

血浓度—时间曲线下的面积为

$$A = \int_0^{+\infty} C_0 e^{-mt}\,dt = 2.27(\mathrm{mg/ml\ h});$$

该药物在体内的总清除率为

$$CL = \frac{给药总量}{A} = \frac{2000}{2.227} \div 1000 = 0.878\ \mathrm{L/h}\ 。$$

细胞的营养摄取模型

1960 年 Horecker、Thomas、Monod 研究菌株摄取半乳糖的情形,可以通过在培养基中加入半乳糖而予以观测。假定在培养基中的半乳糖浓度为常量,细胞内部的放射性半乳糖浓度为

$$C = C(t),$$

初始时由于菌株半乳糖阴性,浓度为零。还假定在任何时刻进入到大肠杆菌里的半乳糖的速率$\frac{dc}{dt}$只取决于体内当时浓度 C 与最终浓度 $\bar{C}$之间的差。发现 $\bar{C}$比培养基中外部的浓度大得多,得微分方程

$$\frac{dc}{dt} = k(\bar{C} - C),$$

其中 k 为正常数,$C(0) = 0$。将方程改写成

$$\frac{d(C - \bar{C})}{C - \bar{C}} = -k dt,$$

积分

$$\ln(C - \bar{C}) = C' - kt\ 。$$

因 $t = 0$ 时,$C = 0$, $C' = \ln(-\bar{C})$。

于是

$$\ln(C - \bar{C}) = \ln(-\bar{C}) - kt,$$

$$ln\frac{C - \bar{C}}{-\bar{C}} = -kt,$$

$$C - \bar{C} = -\bar{C}e^{-kt},$$

$$\therefore\quad C = \bar{C}(1 - e^{-kt})\ 。$$

显然 $\bar{C}$是当 $t \to \infty$时 C 的渐近逗留值,与实际吻合。上式就是细胞的营养摄取数

学模型。

曲线拟合——颅内压与颅内容积模型

现就参数 B(阻滞因子)讨论如下:

(1) 如果肿瘤生长过程中不受阻滞因子 B 影响,则 $B=0$,此时

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=kN,$$

肿瘤生长为指数生长。

(2) 当 $0<B<+\infty$ 时,说明在肿瘤生长过程中有阻滞因子影响,B 由小到大,肿瘤生长从指数生长开始,逐渐偏离指数生长。

(3) 当 $t\to+\infty$ 时,Gompertz 方程成为

$$N=N_0\exp\left\{\frac{1}{B}(k-B\ln N_0\right\}。$$

此时肿瘤大小的极限是不可能达到的数值。现实生活中不存在此现象的原因是当恶性肿瘤的生长达到极限时,宿主无法生存下去。

(4) 当瘤体从 N_0 增长一倍所需时间:

$$DT_{Gom}=\frac{1}{B}\ln\frac{k-b\ln N_0}{k-B\ln N_0-B\ln 2}=\frac{1}{B}\quad\frac{1}{1-\frac{0.693B}{kB\ln N_0}}$$

可见 DT_{Gom} 并非常数,而是瘤体越大,DT_{Gom} 越长。

临床上发现呈 Gompertz 型生长的肿瘤经治疗后的消退方式也符合 Gompertz 方程。因此 Norton 等提出了后期冲击式强化治疗的方案。

捕食生态系统——Lotka – Volterra 方程

1925 年 Lotka 研究有两个相互作用的群体,如宿主与寄生虫(或食饵与猎手),其中一个群体数紧密地依赖于另一个群体数,形成生态消长周期平衡。Volterra (1926)把问题简化为鲨和鲽两类动物间的相克关系,鲨吃鲽,鲽吃小鱼,鲨多鲽少,鲽少鲨少,鲨少鲽多,鲽多鲨多,循环消长,达到周期性平衡。

设 x、y 分别表示时刻 t 的鲽数和鲨数,当 y 为 0 时,x 的增长率与它的存在量成正比:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a_1x\quad(a_1>0)。$$

事实上 y 不为 0,x 的增长受到 y 的制约,设比例系数为 a_1-b_1y,因此,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(a_1-b_1y)\quad(a_1>0,b_1>0)。$$

同样

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-y(a_2-b_2x)\quad(a_2>0,b_2>0)。$$

因鲽不存在时,鲨将开始死亡,故第二式取负号,上两式称 Lotka – Volterra 方程。

上两式相除,有

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{x(a_1-b_1y)}{y(a_2-b_2x)},\qquad -(a_2-b_2x)\frac{dx}{x}=(a_1-b_1y)\frac{dy}{y},$$

$$-a_2\frac{dx}{x}+b_2dx=a_1\frac{dy}{y}-b_1dy,$$

积分

$$-a_2\ln x+b_2x=a_1\ln y-b_1y+\ln c,$$

$$x^{-a_2}e^{b_2x}=cy^{a_1}e^{-b_1y_0}$$

设 $t=0$ 时 $x=x_0, y=y_0$,可求出

$$C=x_0^{-a_2}y_0^{-a_1}e^{b_2x_0+b_1y_0}。$$

按不同的 x_0、y_0 值可以画出一条曲线,从曲线的形状可以看出两个相克种群按周期彼此消长的变化情况。把一个复杂的生物现象,借数学方法得到深刻细致的模拟分析,促进了生物学研究的进展。

1.1.3 生物数学基本内容举例(下)

遗传基因距离的研究

研究两个群体在遗传基因上接近的程度可用基因距离来衡量。有人对爱斯基摩人、班图人、英国人、朝鲜人就 A_1, A_2, B, O 四种等位基因得出其相对频率如下表:

基因 \ 频率 \ 人种	爱斯基摩 ($\boldsymbol{a}_1$)	班　图 ($\boldsymbol{a}_2$)	英　国 ($\boldsymbol{a}_3$)	朝　鲜 ($\boldsymbol{a}_4$)
$\boldsymbol{A}_1$	0.2914	0.1304	0.2090	0.2208
$\boldsymbol{A}_2$	0	0.0866	0.0696	0
$\boldsymbol{B}$	0.0316	0.1200	0.0612	0.2069
$\boldsymbol{O}$	0.6770	0.6990	0.6602	0.5723
$\sum$	1	1	1	1

如何定义基因距离呢?不妨将 $\boldsymbol{a}_i$ 看作单位向量,使它们诸分量的平方和为1,用两个向量间的夹角 $\widehat{\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j}$ 来表示两个群体(人种)间的基因距离,夹角小的距离小,接近的程度就大。

现在将原表改造,对 $\boldsymbol{a}_i(i=1,2,3,4)$ 的各分量开平方,得四个单位向量:

$$a_1=\begin{pmatrix}0.5398\\0\\0.1778\\0.8228\end{pmatrix},\qquad a_2=\begin{pmatrix}0.3216\\0.2943\\0.3464\\0.8307\end{pmatrix}$$

$$a_3=\begin{pmatrix}0.4572\\0.8343\\0.7823\\0.8124\end{pmatrix},\qquad a_4=\begin{pmatrix}0.4701\\0\\0.4650\\0.7563\end{pmatrix}$$

在矩阵代数中

$$\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2=|\boldsymbol{a}_1|\cdot|\boldsymbol{a}_2|\cos(\boldsymbol{a}_1\hat{}\boldsymbol{a}_2),$$

因 $$|\boldsymbol{a}_1|=|\boldsymbol{a}_2|=1,$$

所以 $$\cos(\boldsymbol{a}_1\hat{}\boldsymbol{a}_2)=\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2,$$

$$\cos(\boldsymbol{a}_1\hat{}\boldsymbol{a}_2)=(0.5398,0,0.1778,0.8228)\cdot\begin{pmatrix}0.3216\\0.2943\\0.3464\\0.8307\end{pmatrix}$$

$$=0.9187。$$

查表得夹角

$$(\boldsymbol{a}_1\hat{,}\boldsymbol{a}_2)=23.2。$$

定 23.2 为 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$ 的基因距离。

依同样方式,求得四种人间的基因距离如下表:

	爱斯基摩人	班图人	英国人	朝鲜人
爱斯基摩人	0	23.2	16.4	16.8
班图人	23.2	0	9.8	20.4
英国人	16.4	9.8	0	19.6
朝鲜人	16.8	20.4	19.6	0

可见班图人和英国人之间基因距离最小,而班图人和爱斯基摩人之间基因距离最大

从本例可以得到启发,数学是一种软科学的工具,运用之妙,存乎一心。

遗传平衡的证明

群体中基因频率从一代到下一代保持不变。这是因为生物自身产生遗传平衡。这一现象可从数学上得到证明:

设一对等位基因 A、a 出现的频率分别为 p,q,且

$$p+q=1,$$

可能出现的三种基因型是 AA、Aa、aa，它们的频率分别为 p^2、$2pq$、q^2，基因型的总频率为

$$p^2+2pq+q^2=(p+q)^2=1\ 。$$

当此基因型形成配子时，

$$A\ 配子频率=p^2+\frac{1}{2}\cdot 2pq=p^2+pq=p(p+q)=p;$$

$$a\ 配子频率=\frac{1}{2}\cdot 2pq+q^2=pq+q^2=q(p+q)=q\ 。$$

这样，下一代的三种基因型频率仍与上一代一致，只要交配是随机的，该基因永远保持平衡。

这一证明给遗传学者以很大的鼓舞。

抗生素的优选

模糊数学的问世，为生物数学提供了十分有利的工具。以下三个问题即其例证。

通过药敏试验得到细菌集 B 到药物集 D 的模糊关系 $\underset{\sim}{R}$ 为

B \ D ($\underset{\sim}{R}$)	青霉素	氯霉素	庆大霉素
B_1 肺炎链球菌	0.7	0.3	0.5
B_2 耐药金葡菌	0.1	0.1	0.7
B_3 链球菌	0.8	0.2	0.4
B_4 伤寒杆菌	0.1	0.8	0.2
B_5 绿脓杆菌	0.1	0.1	0.6
B_6 大肠杆菌	0.2	0.4	0.5

根据微生物学知识，下列三种疾病常见感染菌有如下模糊关系：

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1 肺炎球菌性肺炎	0.8	0.1	0.7	0.05	0.1	0.2
A_2 伤　　寒	0.2	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3
A_3 慢性化脓性骨髓炎	0.2	0.7	0.3	0.2	0.5	0.4

根据沙捷斯合成模型，有

$$A_1\circ\underset{\sim}{R}=(0.7,0.3,0.6);$$

$$A_2\circ\underset{\sim}{R}=(0.2,0.8,0.3);$$

$$A_3\circ\underset{\sim}{R}=(0.3,0.4,0.7)\ 。$$

所以肺炎球菌性肺炎宜选用青霉素，伤寒宜选用氯霉素，化脓性骨髓炎宜选用庆大霉素。

环境单元分类

设有五个环境单元Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ，其污染状况由空气、水分、土壤、作物四个因素中含量的超限度来描述，测得污染数据如下表：

U \ V (x_{ij})	空气	水分	土壤	作物
Ⅰ	5	5	3	2
Ⅱ	2	3	4	5
Ⅲ	5	5	2	3
Ⅳ	1	5	3	1
Ⅴ	2	4	5	1

令

$$A=\begin{pmatrix}5&5&3&2\\2&3&4&5\\5&5&2&3\\1&5&3&1\\2&4&5&1\end{pmatrix}=(x_{ij})_{5\times4}$$

如何将 $U=\{Ⅰ\ Ⅱ\ Ⅲ\ Ⅳ\ Ⅴ\}$进行分类？

利用绝对值减数法改造普通矩阵 A 为模糊相似方阵$\underset{\sim}{R}=(r_{ij})_5$。设

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ l-0.1\sum\limits_{i=1}^{4}|x_{ik}-y_{jk}|, & i\neq j\end{cases}$$

得

$$\underset{\sim}{R}=\begin{pmatrix}1&0.1&0.8&0.5&0.3\\0.1&1&0.1&0.2&0.4\\0.8&0.1&1&0.3&0.1\\0.5&0.2&0.3&1&0.6\\0.3&0.4&0.1&0.6&1\end{pmatrix}$$

R不满足传递性，用连续合成法求得模糊等价矩阵

$$R^* = R^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.8 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 1 & 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.8 & 0.4 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 1 \end{pmatrix}。$$

取 λ 截矩阵

λ	R_λ^*	分类
1	$R_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	五类：{Ⅰ}，{Ⅱ}，{Ⅲ} {Ⅳ}，{Ⅴ}无实际意义
0.6	$R_{0.6}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	三类：{Ⅰ，Ⅲ}， {Ⅱ}，{Ⅳ，Ⅴ}
0.5	$R_{0.5}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	二类：{Ⅱ}，{Ⅰ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ}
0.4	$R_{0.4}^* = E$（全称矩阵）	一类，无实际意义

根据实际情况可选取三类或二类。

放射鉴别诊断系统

根据统计分析与经验，设影响胃溃疡与溃疡型胃癌的 X 线征象因素集 S 对诊断集 D 的模糊关系为 R：

S \ R \ D	溃疡型胃癌	消化型溃疡	其他溃疡性病变
龛　影	0.3	0.4	0.3
黏膜增粗	0.4	0.3	0.3
黏膜破坏	0.5	0.3	0.2
黏膜集中	0.3	0.5	0.2
黏膜皱裂融合	0.6	0.2	0.2
环　堤	0.4	0.4	0.2
胃壁梗阻	0.6	0.2	0.2
幽门梗阻	0.4	0.4	0.2
穿　透	0.3	0.6	0.1
侵犯周围组织	0.5	0.4	0.1

病例：一45岁男性病人，因剑突下痛，纳差，体重下降3个月，来院进行胃气钡双重造影检查，其 X 线表现为胃小弯处有一直径为2.5cm的胃轮廓线内龛影，环堤边缘清楚，龛口有粘膜集中，数处粘膜破坏及粘膜皱裂融合征象，胃壁僵硬，幽门管通畅，无病变周围组织侵犯征象。

对照 S 集分析患者 X 线表现，得

$$\underset{\sim}{A}=(0.2,0,0.5,0.2,0.5,0.4,0.7,0,0,0),$$

$$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}=(0.6,0.4,0.2)。$$

该患者患溃疡型胃癌的可能性较大，此诊断与实际相符。

本例中给出的表是症状集 S 对诊断集 D 的模糊关系，认真推敲，使其臻于完善。这是法国专家沙捷斯合成模型的专家系统，对医疗诊断大可借鉴。

以上十个问题所涉及的数学知识有微积分、微分方程、概率统计、矩阵代数、模糊数学，涉及的生物医学知识有遗传学、微生物学、药物学、血液学、细胞学、免疫学、放射学、生物流体动力学、酶动力学、环境科学等，可见生物数学是集数学与生物医学的一门交叉科学。

随着电子技术与生物技术的突飞猛进，生物数学有着广泛的发展前景。数学工作者和生物医学工作者必须更新知识，各自取长补短，通力合作，才有可能赶上新的形势，使我们有着医学王国和数学王国光荣传统的祖国自立于世界之林，再攀医学与数学的科研新高峰。

1.2 从新技术革命看生物数学的发展

1986年中国医药生物数学会在北京成立，我在会上作了“从新技术革命看生物数学的发展”的报告，以后发表在《益阳师专学报》(1987.1期)上。主要内容有：

1.2.1 新技术革命将引发信息社会的兴起

1770年第一次工业革命，革新了纺织和采煤工业。1840年第二次工业革命，革新了蒸汽和铁路工业。1910年第三次工业革命，革新了电气和汽车工业。1960年第四次工业革命，革新了电子和信息业。这四次革新浪潮，突破了“增长极限论”的悲观主义理论，建立了工业社会。恩格斯说：“社会一旦发现了技术上的需要，则这种需要就会比数十所大学更加把社会推向前进。”

工业社会逐步形成的放大化、标准化和集中化，从进步走向了它的反面，引发了生产滞销、管理困难(分配问题、失业问题)、效益问题、能源问题、材料问题，加速了工业化社会的解体，孕育了新的信息社会的兴起。

信息社会推陈出新，提出小型分散、易于管理、易于分配、易见成效，提出多样

化(能源多样化、技术多样化——光电技术、氢化聚变技术、生物工程技术、太阳能地热原子能技术)、电脑化(向大容量、超高速、超微型、智能化方向转化),提高信息资源的威力(开创性、可传递性、可存贮性、可再生性、可加工性),并加速人才的培养。

1.2.2 知识更新与智力投资

钱学森说:"在新的时代生产工人的劳动技术不是以体力为主,而是以智力和知识为基础,要求工人也是知识分子,也成为专家。"

由于新技术的浪潮,科技更新周期日益缩短。据调查,从 20 世纪 60 年代以来人类知识总量每隔 7~10 年翻一番,六七十年代的发明超过了以往 2000 年的总和。科技从发明到应用周期日趋缩短:蒸汽机花 80 年,原子弹 6 年,晶体管 3 年,飞机 2 年,激光只 1 年。我国 1965 年大学毕业生知识陈旧率 5 年达 45%,10 年达 75%。76 年大学毕业生更快,4 年达 50%,10 年达 100%。可见知识更新与智力投资的必要性和紧迫性。

1985 年 3 月全国科技工作会议上,党中央指出:"实现四化振兴中华最大困难不是资源,不是资金,也不是体制。我国基本上不缺资源,资源问题从长远看也是可以解决的,体制问题现在正在改革,大有希望。最大的问题还是人才,缺乏科技人才和管理人才。我们一定要看到,当今世界新技术的发展日新月异,技术革新的周期大为缩短,科学技术的巨大作用越来越具有举足轻重的地位。我国的经济能否起飞,有没有后劲,就要看科技工作者和教育工作者能否大大发展,人才问题能否顺利解决。我们在人才方面有两个问题:一是人才不足,二是现有人才的能量远没有充分发挥。比较起来,后一问题更为迫切。"这在方针政策上给了我国很大的希望和保证。

目前国际上兴起了"继续教育",以补救知识陈旧,充分发挥现有人才的能量。为此,美国 1979 年就投资 20 亿美元。美国工商业培养人才费用每年达 1 千亿美元。这是有远见的而且是有效益的。他们采取这项措施,不仅每年收效上百亿美元,而且使美国科学技术处于世界领先地位。美国钢铁大王卡尔基说:"将我所有工厂、设备、市场、资金全部夺去,但是要保留我的组织人员,四年以后我将仍是一个钢铁大王。""问渠哪得清如许,为有源头活水来。"国家兴盛的源头在科技,科技的源头在人才。

1.2.3 数学化是认识事物的科学方法

人们在反复实践中认识到,要研究实际问题,最好能够应用数学知识,将事物数学化,建立数学模型,反复修正,利用模型来解决这类问题。其过程是:



这既是认识事物的科学规律,也是数学发展的过程。

18世纪中叶,在数学界流行一种看法,即自然科学上的任何问题,只要做到从数学上来理解,找到它的数学描述,就可以借助于当时发展起来的数学分析而获得解决。因此,马克思说:"一种科学只有在成功地运用数学时才算达到了真正完善的地步"(拉发格《忆马克思》)。

科学技术的发展经历着数学化进程。不同的科技发展阶段,提出不同的实际问题。这些问题的数学化产生不同的数学方法,相应地建立不同的数学模型,各种数学模型又可以看成不同发展阶段的数学分支的代表。科学技术的需求就这样不断地推进数学的发展,同样也推进了她的载体科学的发展。

(1)数学物理方法与微分方程模型(略)。

(2)初等统计方法与经验公式(略)。

(3)概率统计方法与随机模型。

设某病手术治疗情况统计如下表,问这种手术效益如何?

治疗情况	痊　愈	轻度并发症	严重并发症	死　亡
概　率	0.35	0.25	0.25	0.15
效益记分	100	70	50	0

随机变量 x 的分布为

$$x:\ \begin{pmatrix} 100 & 70 & 50 & 0 \\ 0.35 & 0.25 & 0.25 & 0.15 \end{pmatrix}$$

手术效果可用期望来评判:

$$E(x)=100\times 0.35+70\times 0.25+50\times 0.25=65(\text{分})$$

这种手术效果一般。

(4)统筹方法与规划模型

某家具厂生产椅子和桌子,每件所需材料、工时、利润以及材料加工时的限制如下表:

	原材料	工　时	利　润
椅子(x)	2	3	5
桌子(y)	5	2	7
限　制	50	42	最大

问各生产多少件才能获得最大利润?

根据问题分析,约束条件是

$$2x+5y\leqslant 50,$$
$$3x+2y\leqslant 42;$$

目标函数为

$$f(x,y)=5x+7y\text{ 。}$$

由单纯形法(一种统筹方法)求得最优可行解

$$\max f(10,6)=92\text{ 。}$$

即生产椅子10件桌子6件可获得最大利润92元。

(5)模糊方法与模糊数学模型

设 $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ 是由症状集 S 到诊断集 D 的模糊关系:

S \ $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ \ D	d_1(肺结核)	d_2(肺气肿)
S_1(咳嗽)	0.3	0.4
S_2(多痰)	0.4	0.5
S_3(气喘)	0.2	0.5
S_4(低热)	0.5	0.1
S_5(咯血)	0.4	0.2

今有一病人其症状为:

病人	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$	0.2	0.3	0.3	0.2	0.4

能否对该病人作出判断?

根据沙捷斯(Sanchez)合成模型

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}\circ\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}=(0.2,0.3,0.3,0.2,0.4)\cdot\begin{pmatrix}0.3&0.4\\0.4&0.5\\0.2&0.5\\0.5&0.1\\0.4&0.2\end{pmatrix}=(0.4,0.3)\text{ 。}$$

可以认为该病人患肺结核的病症大于其患并发症肺气肿病症。

(6)生物统计方法与生物数学模型

设变量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 分别表示被捕食与捕食生物种群的数量,Lotke(1925)与 *Votterra*(1926)得出描述两者生态关系的生物数学模型:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax-bxy,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=cxy-ky,$$

a、b、c、k 表正常数,它的解是

$$k\ln x - cx + a\ln y - by = c'$$。

按不同的 c' 值可以画出一族曲线。从曲线的形状可以看到两个种群按周期彼此消涨的变化情况。把一个生物现象借数学方法得到深刻细致的模拟分析，是数学方法上的创新。

以上可用下表加以概述：

年　代	数学方法	数学模型	数学分支
17 世纪末	数学物理方法	微分方程	经典数学
18 世纪	初等统计方法	经验公式	统计数学
18 世纪末	概率统计方法	随机模型	统计数学
20 世纪 50 年代	统筹方法	规划模型	运筹学
20 世纪 70 年代	模糊方法	模糊数学模型	模糊数学
20 世纪 60 年代	生物统计方法	生物数学模型	生物数学

1.2.4　医学数学化是时代的使命

20 世纪以来，生物学、医学已从定性研究发展到定量研究。有专家说现代医学要上两个水平：分子水平和数学化水平。前者开辟了生命系统微观结构的新前景，后者将开辟医学体系理论结构的新前景。

目前医学数学化已迈出可喜的步伐，在电脑的参与下出现了医疗诊断专家系统。1971 年美国拉特格斯大学治疗青光眼的 CASNET 系统，1972 年斯坦福大学治疗传染病的 MYCIN 系统，1973 年匹兹堡大学治疗内科病的 INTERNISP 系统，1974 年麻省理工学院治疗肾脏病的 PIP 系统等都是以医学数学化为前提，电脑为工具，充分发挥医学理论与技术的典范。

几十年来出现了许多现代医疗器械，如 CT 扫描仪、彩色多普勒血流显像系统、骨矿物资密度测定仪等，也是医学、数学、电脑三结合的产物。

1985 年医学诺贝尔奖授予瑞士数学家 Jerne。他在论文《免疫网络结构理论》中揭示了现代医学科研的新方向是医学数学化。有专家说：下一个医学诺贝尔奖将奖给"医学数学化"作出突出贡献的专家。

目前医学界和数学界对"医学数学化"问题还不甚敏感，学数学的很少把医学作为载体来研究，学医学的忽视数学的作用。过去学苏联，医学院没开数学课程达 20 年之久，几乎形成断层。现在美国、法国进步很快，日本把我国的中医作为"东洋医学"研究，国际中药市场几乎被日本垄断，而我们曾是"医学王国"，我国也有人将模糊数学用于医学。这些问题都应引起医学界的重视。时代前进的步伐很快，

落后就要挨打。我们中国人有志气改变这种形势，攀登医学数学化的高峰。

我在原北京医科大学庆祝中国生物数学成立会上发言时，卫生部陈敏章部长在座，当场表态支持我的发言，并说他在上海医科大学也没学高等数学，今后要加强数学教育，向部属院校领导宣传，还约我到部里细谈。我到卫生部里汇报时，他要了我的文章(以后在《健康报》、《人民日报》上发表)，并希望我来卫生部工作。

2 模糊数学

2.1 模糊数学的创立

模糊数学(Fuzzy Mathematics)是1965年由美国控制论专家扎德(L.A.Zadeh)提出来的。它是研究模糊领域中事物数学化的一门边缘学科,现已成为数学的一个分支。

Fuzzy的原意是不分明、模糊的意思,开始有人译为"乏晰",以后才译为今名。模糊数学是研究模糊现象的数学,不要误解为模糊的数学。

数学的源泉是实践,人类实践的范围是广阔的,用数学的观点可把实践中所遇到的现象大致分为三类:确定现象、随机现象和模糊现象。为解决确定现象,逐步发展起来的数学有几何、代数、数学分析、微分方程等。习惯上把它称为经典数学。概率论与数理统计是研究随机现象的数学工具。而模糊数学则是研究模糊现象的数学工具。

在经典数学里,对一个概念要给出明确的定义,既要指出它所属的种(外延),也要揭示它的本质属性(内涵),对于命题要借推理来明辨真伪。这就突出了经典数学的三个特征:精确性、实用性和逻辑性。

对于经典数学所赖以建立的二值逻辑也是有争议的,著名的罗素(B.Russell,1872~1970)悖论和秃头悖论即其例证。

对一个是非界限本来不清的概念,如果勉强用"是非"标准来作划分,必导致谬论。秃头悖论是对经典数学挑战的信号,说明这一类问题是不能用二值逻辑来作判断的。

实践的范围是广泛的,事物是复杂的,有些概念并不是明确的,如年轻、胖子、高个子、大小、体虚这些概念都没有明确的外延。"张三年轻,李四性情温和"这类命题的判定也不是绝对的只分真假。是非之间也可能有似是而非,好坏也不是绝对的,也许还有不好不坏。这就是模糊概念、模糊命题大有生存空间,这是经典数学所难以描述的。

比如"高个子"的概念,就是要有一个明确高度H,当 $h \geqslant H$ 就称为高个子,这个 H 是不确定的,模糊的。再看一个小数的概念。

设 $X = \{1,2,3,4\}$,这四个元素有大小之分。现在要组成一个"小数"子集,显然1是100%的小数,应属于这个子集;元素2"也还小",或者算八成小,或者说2是80%的小也放在这个"小数"子集里;元素3是"勉强小",或者算二成小,说3是

20%的小，也放在“小数”子集里；元素 4 不算小数，如果定要放在这个子集里，只能说 4 是 0%的小数。扎德把小数子集写成下面的形式：

$$[\text{小数子集}] = \frac{1}{1} + \frac{0.8}{2} + \frac{0.2}{3} + \frac{0}{4},$$

其中 1,2,3,4 表元素，1,0.8,0.2,0 分别表示 1,2,3,4 在小数子集中的隶属于小数的程度。

一般来说，可以写出定义：

如果对论域 X 中的每个元素 x，都规定属于闭区间[0,1]的一个实数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$，则在 X 上定义了一个模糊子集 $\underset{\sim}{A}$：

$$\underset{\sim}{A} = \left\{ \frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)}{x} \mid x \in X \right\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)}{x_i},$$

n 可以为 ∞，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 称为 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数(Membership function)，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)$ 称元素 x_i 的

$\vee$称取大，$\wedge$称取小，

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1-0.5 & 1-0.3\\ 1-0.4 & 1-0.8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.7\\ 0.6 & 0.2\end{pmatrix}。$$

包含：若 $a_{ij}\leqslant b_{ij}$，则称 $A\subseteq B$。设 A 含于 B，或 B 包含 A，如

$$\begin{pmatrix}0.5 & 0.3\\ 1 & 0.7\end{pmatrix}\subseteq\begin{pmatrix}0.6 & 0.3\\ 1 & 0.8\end{pmatrix}。$$

合成：设 $\boldsymbol{A}$ 表示 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的模糊关系，$\boldsymbol{B}$ 表示 $\boldsymbol{Y}$ 与 $\boldsymbol{Z}$ 的模糊关系，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的合成

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}。$$

定义为 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Z}$ 的模糊关系，其隶属函数为

$$\begin{aligned}\mu_{C}(X,Z)&=\mu_{A\circ B}(X,Z)\\ &=\operatorname{Sup}\{\min[\mu_A(x,y),\mu_B(Y,Z)]\},\end{aligned}$$

或
$$c_{ij}=\bigvee_k(a_{ik}\wedge b_{kj})。$$

即先取小，后取大。它的框架是：

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{Y}$
$\boldsymbol{X}$	$(a_{ij})_{m\times l}$

$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{Z}$
$\boldsymbol{Y}$	$(b_{ij})_{l\times n}$

$\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{Z}$
$\boldsymbol{X}$	$(c_{ij})_{m\times n}$

设
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.8 & 0.7\\ 0.5 & 0.3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0.2 & 0.4\\ 0.6 & 0.9\end{pmatrix},$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}&=\begin{pmatrix}(0.8\wedge0.2)\vee(0.7\wedge0.6) & (0.8\wedge0.4)\vee(0.7\wedge0.9)\\ (0.5\wedge0.2)\vee(0.3\wedge0.6) & (0.5\wedge0.4)\vee(0.3\wedge0.9)\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}0.2\vee0.6 & 0.4\vee0.7\\ 0.2\vee0.3 & 0.4\vee0.3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.6 & 0.7\\ 0.3 & 0.4\end{pmatrix}。\end{aligned}$$

注意：

$$\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.2\vee0.4 & 0.2\vee0.3\\ 0.6\vee0.5 & 0.6\vee0.3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.4 & 0.3\\ 0.6 & 0.6\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}。$$

可以证明，它满足结合律：

$$(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\circ\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\circ(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{C});$$

满足对并的分配律：

$$(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})\circ\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{C})\cup(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{C}),\boldsymbol{C}\circ(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{C}\circ\boldsymbol{A})\cup(\boldsymbol{C}\circ\boldsymbol{B})。$$

但不满足对交的分配律：

$$(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})\circ\underset{\sim}{C}\neq(\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{C})\cap(\underset{\sim}{B}\circ\underset{\sim}{C}),$$

$$\underset{\sim}{C}\circ(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})\neq(\underset{\sim}{C}\circ\underset{\sim}{A})\cap(\underset{\sim}{C}\circ\underset{\sim}{B})。$$

举一个有趣的例子。设某家庭中子女与父母外貌相似的关系为一模糊关系：

$\underset{\sim}{R}_1$	父	母
子	0.8	0.5
女	0.2	0.6

$$\underset{\sim}{R}_1=\begin{pmatrix}0.8 & 0.5\\0.2 & 0.6\end{pmatrix};$$

父母与祖父母的外貌相似关系为另一模糊关系：

$\underset{\sim}{R}_2$	祖父	祖母
父	0.7	0.6
母	0.1	0

$$\underset{\sim}{R}_2=\begin{pmatrix}0.7 & 0.6\\0.1 & 0\end{pmatrix};$$

两模糊关系的合成：

$$\underset{\sim}{R}_1\circ\underset{\sim}{R}_2=\begin{pmatrix}0.8 & 0.5\\0.2 & 0.6\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0.7 & 0.6\\0.1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.7 & 0.6\\0.2 & 0.2\end{pmatrix},$$

其模糊关系为

$\underset{\sim}{R}_1\circ\underset{\sim}{R}_2$	祖父	祖母
子	0.7	0.6
女	0.2	0.2

即祖父与其孙子颇为相像，而与孙女则不很像。

为了以后用于医学，这里还要介绍模糊变换（Fuzzy transformation）的概念。

设 $\underset{\sim}{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是 n 维模糊向量，

$$\underset{\sim}{R}=\begin{pmatrix}r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m}\\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm}\end{pmatrix},$$

是以 $n\times m$ 维模糊矩阵形式给出的模糊关系，则

$$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{B}$$

称为模糊变换。由 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{R}$ 通过变换可以确定一个 m 维模糊向量

$$\underset{\sim}{B}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)。$$

这个定义可以这样来理解，$\underset{\sim}{R}$ 是由论域 X 到 Y 的模糊关系，通过关系 $\underset{\sim}{R}$，将 Y 中的

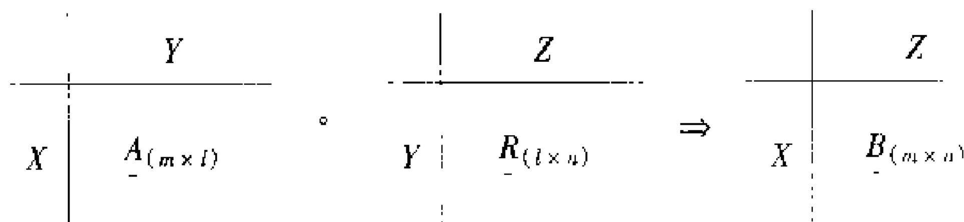
一个向量$\underset{\sim}{A}$变换为 Y 中的一个向量$\underset{\sim}{B}$。换言之，模糊变换可以解释为从一个论域 X 转换为另一个论域 Y。

模糊关系更一般的定义是：设 $\underset{\sim}{A}$是 $m \times l$ 模糊矩阵形式给出的从 X 到 Y 的模糊关系，$\underset{\sim}{R}$是 $l \times n$ 模糊矩阵形式给出的从 Y 到 Z 的模糊关系，则

$$\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{B}$$

称为模糊变换。由 $\underset{\sim}{A}$和 $\underset{\sim}{R}$通过变换可以确定一个 $m \times n$ 模糊矩阵形式给出的由 X 到 Z 的模糊关系。注意：这里 $\underset{\sim}{A}$与 $\underset{\sim}{R}$中的 l 必须相同。

其框架是：



设某医院从大量病例中总结出医疗经验，用模糊关系 $\underset{\sim}{R}$表示，$\underset{\sim}{R}$为症状对诊断的关系。如果病人的某些症状用模糊矩阵 $\underset{\sim}{A}$表示，则

$$\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{B}$$

就是对该病人的诊断意见书。这就是专家咨询系统的理论。

设储存在电脑内的医疗经验为矩阵

$$\underset{\sim}{R} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}。$$

某病人对这种症状的模糊矩阵是

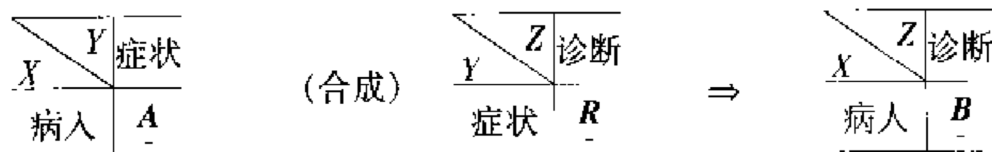
$$\underset{\sim}{A} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 \\ 0.7 & 0.8 \end{pmatrix},$$

将 $\underset{\sim}{A}$输入有合成功能的电脑，就可以获得该病人的诊断意见书 $\underset{\sim}{B}$

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{R} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 \\ 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 & 0.7 \end{pmatrix}。$$

医生根据电脑输出的结果，就可以开出处方。当前先进的医院使用电脑终端问诊系统大意如此，其示意框图如下：



法国生物学家数学家沙捷斯(E. Samchez)从专家经验和大量病例中总结出从症状集 S 到诊断 D 的模糊关系:

S \ $\underset{\sim}{R}$ \ D	d_1	d_2	…	d_m
s_1	r_{11}	r_{12}	…	r_{1m}
s_2	r_{21}	r_{22}	…	r_{2m}
⋮	⋮	⋮		⋮
s_n	r_{n1}	r_{n2}	…	r_{nm}

模糊矩阵为 $\underset{\sim}{R}$

$$\underset{\sim}{R}=(r_{ij})_{n\times m}=\left\{\frac{r_{ij}}{(s,d)}\mid(s,d)\in(S\times D)\right\},$$

$$r_{ij}\in[0,1]。$$

$\underset{\sim}{R}$可以看作医疗诊断的专家系统。在医学数学化问题中将举出一些实例来应用这个世界知名的模型。

2.3 模糊数学入门

我是为研究生数学而学习模糊数学的。1980 年法国生物学家、数学家沙捷斯应邀来北京讲学,我参加了学习班。我是班上最老的学生。他讲法语,学习很吃力,但我翻译了他的法文讲稿。以后学院要我办全国性学习班,推广模糊数学,开始编《模糊数学导论》,在院内开讲座试教,1984 年举办全国性学习班,1985 年办第二期,1986 年省数学学会邀请举办一期,1987 年湖南省公路学会邀请办了一期,湖南省环保学会也办了一期,讲义不断补充修改,写成《模糊数学入门》(由上海知识出版社 1987 年出版)。其内容包括:预备知识(集合、矩阵、概率)、模糊集、模糊关系(模糊矩阵、模糊变换、沙捷斯模型、综合评判、模糊图、模糊聚类分析)、模式识别(模糊方法、机器模式识别、几何图形识别)、模糊语言、模糊逻辑、模糊数学与人工智能、模糊医疗决策、气象预报、矿产预测、农业经济的综合评判、农业种植区划、模糊数学用于体育科学、人文科学与管理科学等。

我发表了一篇《医学模糊决策》的长文。北京第二医学院将它出版作为该校研究生教材。

我还写了一篇《数学化与思维科学》,在全国思维科学会上作了发言,其中介绍了广州蔡文教授创立的"物元分析"。

在广州召开物元分析学会时还作了《论物元分析(MEA)对数学的开拓》的报告和模糊数学的介绍。报告刊登在《益阳师专学报》(自然科学版,1988 年 1 期 1 ~ 6 页)上。

3 教材建设

3.1 医用高等数学

解放后，医学院没有开设高等数学课程，也就没有教材。我只好先编讲义。我不懂医，先当学生，向研究生请教。久之，使我明白，学数学要有载体，这样数学才有用武之地。

模糊数学是研究模糊领域中事物数学化的一门边缘学科，现已成为数学的一个重要分支。医学中的概念大都是模糊的，比如要反映某种疾病，通过检验，给出程度上的差别，规定阴性(-)，弱阳性(+)、双阳性(++)、强阳性(+++)四级，比有病无病两级要更合理，再进一步就可用百分比来表示病情，这就是模糊数学中隶属函数的雏型。可见用模糊集可以定义某种疾病，这就是医学数学化的思想。

伽利略(Galilei，Galileo，1564~1642)曾说："现在是第一次把一个拥有许多奇妙结果的新方法公开出来，在未来的年月里，它将赢得别人的重视。"模糊数学的出现证实了伽利略的预言，深信模糊数学必将对医学科研建立奇功。

我用这个思想作指导钻研模糊数学，向研究生学医，试教，写文章，编教材。通过五年的努力，写成了《医用高等数学》，约48万字，由湖南科学技术出版社于1986年出版，有19所医科院校作为教材，1986年7月20日国家教委列为全国高等学校理工农医的数学教材。我的老师、著名数学家江泽涵院士写了书评，称这是"一部艰苦耕耘的经著——评青义学编著的《医用高等数学》"，该书评后刊登在《健康报》(1986.8.31)，《科技书窗》(1986.9.15)，《中国教育报》(1986.11.25)。

该书分七章，第一二章为一元函数微积分，第三章为微分方程，第四章为多元函数微积分，第五章为概率论，第六章为线性代数，第七章为模糊数学。书中有二百多个关于医学的例题，还写了有关的数学史话。

附 江泽涵院士书评：

在一个较长时期，医学与数学似乎是绝缘的。有人认为"没有数学照样看病"，"数学在医学中的应用等于零"。随着科学技术的发展，统计学在社会医学中最先被采用，数学物理方法应用于细胞的生长、溶液的混合、分子的渗透，使经典数学、统计数学进入了医学这个"禁区"，特别是医学中模糊概念最多，最近发展的模糊数学用于医学，更是如鱼得水，使数学与医学本来"疏远"的两门科学竟变得如影随形，须臾不离地亲密起来。广大医学工作者渴望有一本这方面的书籍以满足医学科研的需要。在读了青义学教授撰写的《医用高等数学》以后，一种欣慰感油然而

生。这是一本符合面向现代化、面向实际,培养能力,具有改革精神的难得的佳著。

作者参考了国内外有关专著结合医学的需要,在取材上颇具匠心。既论述了系统理论与方法,又结合医学实际,而且首次在高等数学课程中引进了模糊数学这一现代化分支,具有远见卓识,是这本书的一大特色。

这本书的内容安排适用而又节省课时,叙述从医学工作者熟悉的问题入手,步步深入。并结合有关教材引进少量的数学家轶事,特别是我国在数学上的成就,犹如在通径路边种上名花异草,读来令人兴趣盎然。

写高等数学而能达到如此地步,殊非易事,作者四十多年教学的心血结晶凝聚在此书之中。可谓积之厚而发之薄,字里行间,无不留下作者艰苦耕耘努力开拓的印痕。这不仅是一本医用数学,也是写得很好的高等数学,适于教师和自学者参考。阅读之余,感慨系之,伏案一评,以飨读者。

江泽涵
1986 年 8 月
于北京大学

浙江医科大学周柱怀教授来信说:"这本书有一条思维路线把教材串连起来,如珠走盘,水流花放,节省了备课时间。学生反映,书上把积分法、微分方程解法、二重积分法、线性代数的思路写活了。"医大研究生说:"以前觉得数学难学、书难看,现在正相反,理论、法则、小结,一目了然,学得兴味盎然。"

3.2 生物医学数学模型

1983 年以来我在外文书刊上摘记了许多专家利用数学研究解决生物学和医学中的问题,如 Mitscherlich 研究生物种群的生长(1939),牛顿冷却定律,Horecker、Thomae、Monod 关于细胞营养的摄取(1960),Hoorweg、Rashevsky、Monnier、Blair 研究神经刺激理论,Page 关于生长曲率的研究实验(1970),Mendelsohn 的肿瘤生长模型,Kety、Schmidt 对大脑血流率的测定,Bernard Katz 神经肌接头传递机理论,Thom 的突变论(1968),Gause 的竞争排斥实验(1934),Lotka、Vilterra 食物链的数学模型(1926),Blaxter、Graham、Wainman 反刍动物的食物通道模型,Gompertz 的生长模型(1935),Jokipi、Turpinen 的葡萄糖耐量实验(1954),Fick 扩散定律,Michaelis - Menten 公式等等。我对这些成就,其中的生物医理不懂,把它们分别制成卡片,注明书名页数送给有关科室的研究生,向他们请教。他们研究后(包括请教指导老师)讲解给我听(包括书面形式)。他们常来我家叙谈,他们说我家是第二辅导站。

我对研究生的数学考试作了一些改革,小考考数学,期考写论文,写如何用数学处理医学问题。其中发现不少优秀作品。我把它推荐在《湖南医学院学报》、《湖

南医学院研究生》上发表，如殷杰的《兔急性颅高压时颅内容积与压力的关系》，汤显良的《药物浓度在体内变化规律的统计分析》，张宇用模糊集定义艾滋病（AIDS），严奉祥用模糊数学优选抗生素，金一平的《胃脘痛“症一证一方”模型》，还有几个研究生合写的《冠心病患者的血清脂蛋白检测》，李毓的《脾胃虚辨证模型》用模糊综合评判处理中医辨症论治。

我用这些成果于 1987 年 7 月在广州应用数学成果报告会上作报告，回校后又将报告稿印发给有关研究生。“青出于蓝而胜于蓝”，甚感安慰。同时也激发了研究生学习数学的兴趣。

我在搜集研究生的卡片问题的回报与期终考试论文的分析中积累了大量素材，写成了《研究生高等数学教学 11 年》，印发给研究生。经反馈意见后费两年时间写成《生物医学数学模型》，于 1990 年由湖南科技出版社出版。出版后用它作为研究生选修课《医学数学模型》的教材。

3.3 《医学数学模型》教学提纲

一、医学数学化

1 科学数学化的潮流

2 医学数学化的崛起

3 数学化方法对医学进展的影响

4 医学现代数学教育

二、数学化方法与数学模型

1 数学发展的四个里程碑

2 数学模型的建立

三、微分方程模型

1 变化率

2 数学物理方法

3 生态模型（生物种群生长、微生物菌落、人口、细胞、营养）

4 医学模型（神经、流行病、肿瘤、颅内压）

5 观察实验方法（Fibonacci 数列、繁殖率）

四、统计数学模型

1 统计方法与孟德尔遗传律

2 最小二乘法与经验公式

3 概率模型（计量诊断、遗传、基因频率、深静脉血栓、肿块）

4 概率分布

五、生物数学及其模型

1　生物数学的兴起
2　生物现象数学化的特点
3　Gause 竞争排斥实验定律
4　捕食生态系统
5　生存分析
6　曲线拟合
7　医学模型(催化、毒物蓄积、血流量、室分析、扩散)
六、矩阵代数模型
1　矩阵
2　矩阵乘法模型
3　传染病接触情况的研究
4　基因距离的研究
七、模糊数学及其模型
1　模糊集
2　模糊关系
3　模糊集应用理论(综合评判、模糊聚类分析、模式识别、模糊统计、模糊概率)
4　医学数学化的基本结构(疾病集的表示、症状集与症病集的模糊关系、推理论证、模糊决策、病症数量分析、医疗器械的数学机制)
5　诊断模型(隶属原则识别、比值识别、阈值识别、鉴别诊断、评判模型)
6　医疗诊断专家系统(肝病、中医内虚证、急腹症、先天性心脏病、牙病、支气管炎)

3.4　模糊集与医学数学化

1991 年以来收集资料,用三年时间写了一本《模糊集与医学数学化》,约 30 万字。到 1998 年台湾建强出版社简焜昌来长沙,经学校介绍约我写稿《微积分学的理论与练习》、《数学史话》,同时带去《模糊集与医学数学化》。一去三年消息全无,约稿都已写成,只得束之高阁。他带去的书稿也没有追回。虽然签有合同,形同虚设。简焜昌同时也约了原中南工业大学与国防科技大学的两位教授,他们同我一样受骗,只怨自己荒唐而已。

4 教学改革

医科研究生的教学分两部分，一是必修课“高等教学”，从 1978 年到 1988 共 11 届，二是选修课“医学数学模型”，从 1989 年到 1992 年共 4 届。高等数学的教学改革工作体现在我写的两篇文章上，一是《给医科研究生开设“高等数学”课的探索》，刊登在国务院《学位与研究生教育》(1987.2 期)，二是我向研究生处的汇报：《研究生高等数学教学 11 年》。

4.1 给医学研究生开设“高等数学”课程的探索

1978 年恢复研究生招生考试制度以来，湖南医学院已招收九届研究生，并开设了高等数学课程。入校研究生在大学没有学过高等数学，初等数学基础也很差，因此，在高等数学教学上还存在一些认识问题：如学医为什么要学数学？学多少？学到什么程度？如何改革教学方法从传统的封闭型转变为开放型？从单纯的传统知识转变为创造才能的培养？本文拟就这些问题谈谈我们的认识、做法和体会。

数学在医学科研中的作用问题

数学是自然科学的基础和工具，对医学是否也是如此呢？医学界众说纷纭。有人认为“医学现代化必须把数学和计算机作为自己的基础和工具”；有人则认为“医药科学主要是治病救人，医学现代化主要是两个先进、三个自动化，即医疗设备先进、药品生产先进，临床检测自动化、问诊手段自动化、管理系统自动化，似乎与数学无关”。研究生也有类似的看法。我带着这个问题查阅了外国的有关专著和杂志，发现医学专家 Huxley、Blair、Hoorweg、Sanchez 等人用数学化方法描述医学现象和问题，上升为数学模型，利用数学来解决医学问题。他们在医学领域重现了数学在物理学、天文学、工程技术等学科中所起的作用，他们的共同模式是：

“实际问题→数学化(定量分析)→数学模型(定性指标)→反馈修正(实践检验)→定性理论”。

例如，Blair 研究神经兴奋问题，用数学物理方法建立微分方程

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = mv - k\varepsilon,$$

式中 ε 表示刺激增量，m、v、k 为实常数，由上式解出

$$\varepsilon = \frac{mv}{k} + ce^{-kt}$$

设 $t=0$,时 $\varepsilon=0$,得

$$c=-\frac{mv}{k},$$

导出医学上著名的神经刺激理论模型

$$\varepsilon=\frac{mv}{k}(1-e^{-kt})。$$

可见,没有数学也就没有这个理论。

又如研究 30~80 岁妇女的正常血压(y)与年龄(x)的关系。有人根据医院病历统计资料和最小二乘法求得一条回归直线:

$$y=\frac{7}{5}x+64 \qquad (30\leqslant x\leqslant 80),$$

它可以作为妇女正常血压的模型。不利用数学,再多的病历资料也只是一堆废纸。

现在这个数学化的模式在新技术革命浪潮推动下又有重大的发展。1985 年医学诺贝尔奖金授予一位数学家 Jerne,他的主要成果是"免疫网络理论"。他创造性地提出了现代医学科研的新方法:

"医学免疫问题→数学化(知识表达技术)→计算机完成计算与论证(机械化推理技术)→反馈修正(实践检验)→免疫网络理论(系统构成技术)"。

这个现代化的科研模式,集专业、数学、电脑于一体,必将推动现代化科学技术获得突破性的进展。马克思早就指出:"一种科学只有成功地运用数学时才算达到了真正完善的地步。"

从这里可以看出数学作为基础科学的地位与作用。现代医学必须把数学和电脑作为自己的基础工具。实际上数学已经渗透到自然科学、社会科学、思维科学和人体科学等领域。

我国医药卫生科学三十多年来取得了很大的成绩,这是有目共睹的,但是远远没有现代化。有的医学专家说:"当代中国医药学不如世界先进国家之处,最根本的原因在于数学水平低,科研方法陈旧,不能广泛利用计算机"。"今天我国医学权威,对世界重要医学杂志里 1/3~1/5 的论文看不懂,因为那里有大量的数学。"而我国的医学杂志中的文章,却很少用到数学,这是与医学现代化的趋势很不相称的。还有的专家认为医学现代化必须加强基础理论研究。朱宪彝教授曾说:"医学要特别重视数理化生的基础,没有理科基础,看病不懂病,医学也上不去。"他还主张在综合性大学重建医学院,一方面加强用理来指导医,另一方面使理科更为务实,更有利于国计民生。

目前数学已从非生命领域进入生命领域,从自然科学进入社会科学、思维科学与人体科学。医学现代化寄希望于改变医学工作者的知识结构,必须从现在起,加强数学教学,跟上时代的步伐;否则,我国医药事业不仅今天落后于世界,而且明天也将落后于世界。

医学数学教学内容的精选问题

学医应该学哪些数学知识呢？数学文库，浩如烟海，作为教学内容必须有所选择。选择的原则，第一是现代化。中央提出教育要三个面向，核心是现代化，一定要适应时代需要，淘汰落后的知识，不推陈就不能出新。目前数学教学，受传统的影响，把医学系当数学系教，重理论轻实践，如果不破唯理主义就不能去繁就新，讲200课时也学不到现代的东西。第二是适用性。从学医的需要来精选内容，合则留不合则去。数学教师对医学是外行，但至少要知道学医需要哪些数学知识，听点医学基础课，参考国内外医学杂志，懂得现代化医学科研方向，是有利于教数学的；否则讲些无补于医学实际的东西，再高明的数学也只能束之高阁浪费时间。第三是基础性与科学性。要学现代的知识，忽视基础是上不去的，没有科学体系也是不行的。第四是浓缩性。目前的课程愈来愈多，而总的学时有限，必须考虑学生负担，讲究效益。教师的知识要博，教学内容要精，要浓缩，要积之厚而发之薄。

根据这些原则，学医需要学习微积分、微分方程、概率统计(统计部分在卫生统计学中讲)、线性代数和模糊数学，有条件还要选学生物数学、规划论、最优化理论。医学本科从1981年起开设了高等数学，1987年以后研究生的起点可以高一些。

我还以为数学内容的改革，首先要编出符合改革精神的教材。我编写了《医用高等数学》作为教材，已由湖南科技出版社出版。国家教委将之列入全国高校理工农医交流教材。这本书基本上是根据以上原则选材的，首次在高等数学中引进了模糊数学。我从1983年起在研究生班讲授模糊数学的基本知识。从85届41位研究生所写的“模糊数学在医学上应用的设想”得知，可以在麻醉与监测、手术效果、药物疗效、检验指标标准化、细胞分类、肺癌分型、中西医结合、临床心理学、骨髓细胞学、神经病、神经内科、传染病、骨头结构、流行病、营养卫生、劳动卫生、慢性荨麻疹、皮肤病、红斑狼疮、儿科、小儿惊厥、小儿发热原因待查、白血球、胆道结石、冠心病、心肌缺血、心肌收缩、心肌梗死、休克、黄疸症、阴道流血、肿瘤、杂交瘤、青光眼、耳聋、哮喘、放射诊断、生理、生化、组胚、微生物、寄生虫、药理等43个方面应用模糊数学。他们只听了14课时的讲授，大都自己阅读教材，找参考书，写出心得。可见模糊数学易学用广。在医科院校讲授这一学科，大有益处，我们的这一试点是有成绩的。

关于教学方法的改革问题

我在研究生的教学上遇到的困难：第一是学生数学基础差，这与本科是大不相同的(以后将随本科生学过微积分有所改善)。研究生招生时不考数学，这九届研究生入学后初等数学摸底考试的平均分数在7~56分之间，他们中有些人近十年没有接触数学。第二是教学内容多(从微积分到模糊数学)，学时少、起点低、任务重。照常规教法，需要200课时。不改革教学方法，不破唯理主义是无法完成任务的。近年来我以108课时讲完了全部内容，前八届学生成绩优秀的百分比依次是

63.3,60,66.7,61.2,73,56.4,60,86.4。

我采取的方法是:第一,调动学习数学的自觉性,反复讲清数学在医学科研中的地位和作用,使他们懂得新型医务人员的知识结构,自己在改变医药落后面目中所肩负的重任,没有数学的基础,医学是上不去的。从而调动了他们刻苦学习的决心。没有学生的积极学习,任何好的教师都是无法完成数学任务的。第二,重点讲授,启发思维,培养能力,开拓视野。课堂着重讲清概念和方法,引导发现真理独立思考,理论可适当放宽,有些证明和实例,指导学生阅读教材,认真练习,把数学作为训练思维,培养能力的锻炼,提高他们独立工作的能力。第三,因材施教。凡用到初等数学的公式、方法,及时提示基础,一竿子插到底,对有困难的学生加强个别辅导,力争忙在前面,促其赶上进度。第四,利用教材,利用板书,利用多层的复习,利用小考,检查教学,督促学习,提高兴趣,减轻负担。使学生听课有味,思考有方,复习有书,解题有术。

我认为教学改革的关键,对于教师有两条:第一,要有社会主义教育思想,热爱教育事业,热爱学生,严格要求,以身作则,既教书又育人。没有这一条就没有方向、没有动力,就不能千方百计把学生塑造成才。第二,教师要不断更新知识,吸取营养,既要予人以规矩(知识和科学),又要予人以巧(智慧和能力),没有这一条就培养不出创造与开拓型的人才。

4.2　研究生数学教学11年

我针对医科研究生的教学改革,写了一篇《研究生数学教学11年》的论文。论点有二点:一是教材建设,将内容陈旧脱离实际的教材改为实用的现代型的教材,使研究生能追上时代潮流,为以后医学数学化的科研贡献力量;二是逐步增加现代数学的时数(见下表)。

年级	总学时	初等数学	一元微积分	微分方程	多元微积分	概率论	线性代数	模糊数学	生物数学	期终复习	现代数学比重
78	158	40	79	11	10	12				6	
79	76	32	38	6							
80	80	24	52	4							
81	120	30	65	11	14						
82	110	10	61	11	10	10				6	
83	108	10	36	14	12	18	10	4		4	4
84	108	10	16	10	12	16	12	8		4	8
85	112		40	11	15	16	12	14		4	14
86	102		32	10	12	12	14	17	6	4	23
87	102		30	12	12	12	12	20	6		26
88	96		29	10	9	16	8	20	8		28

注:选修课未统计在内。

5 关于数学化的探究

5.1 数学化与数学模型

1984 年我在开封的一次会议上作了题为"数学化与数学模型"的发言。以后又在解放军航校就此题作了报告。整理成文后发表在《数学通报》(1984 年 11 期)上。摘录如下：

研究自然科学、工程技术乃至农业、商业、经济、政治中的实际问题，往往要应用数学知识从事物的定量分析中将其数学化，建立数学模型，利用模型来解决这类问题。其过程是：

"实际—数学化—数学模型—检验—应用"

这是一种先进的科学研究方法，不仅可以使某些实际问题典型化、数量化，有利于问题的解决，而且在建立模型的过程中增强了数学的生命力，发展了数学。因此，数学化与数学模型成为数学与各学科的扭带，成为科技界与实际工作者所急切关心的问题。

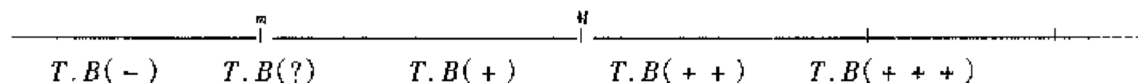
我们来考虑一个病例：

有一怀疑为肺结核(T.B.)的门诊病人，其症状是咳嗽、多痰、气喘、低热、咯血，医生根据症状的轻重程度(数量)给出隶属度，又根据症状对肺结核的影响程度给出权数(数量)，如下表所示：

症状 A_i	咳嗽	多痰	气喘	低热	咯血
隶属度 μ_i	0.2	0.5	0.2	0.5	0.3
权数 a_i	0.3	0.4	0.2	0.5	0.5

$$\sum_{i=1}^{5} a_i \mu_i = 0.06 + 0.20 + 0.04 + 0.25 + 0.15 = 0.70,$$

再根据病例的统计资料确定 $T.B$ 的阈值 $M = 0.75$，疑值为 $m = 0.45$。



现 $0.45 < 0.70 < 0.75$，可定病人 $T.B.$ 可疑，再作进一步检查和确诊，从定量到定性，就比较慎重稳妥。可以提高确诊率，从而避免主观意断，甚至误诊。

有些实际问题的数学化很困难。让我们看另外一个种植问题的例子。

一种植物在某一区域的分布情况如下图所示：

数出每个格子中个体的数目：

1	4	1	0	2
3	1	2	3	0
1	3	6	1	2
2	1	3	0	2

再统计出下表：

每个格子中的个体数目	格子数目	在每类格子中个体的总数目
0	3	0
1	5	6
2	5	10
3	4	12
4	1	4
5	0	0
6	1	6
总　计	20	38

这38个个体是随机分布的，是否可以用一个数学模型加以描述呢？我们可以这样来考虑：在有20个格子的区域内随机投球，每一格子被球击中的概率 $p=\frac{1}{20}$，把同样的实验重复 $n=38$ 次，这显然是Bernoulli概型，因此

$$P\{X=k\}=C_{38}^{k}p^{k}q^{38-k},$$

$$p=\frac{1}{20},q=\frac{19}{20},k=0,1,\cdots,38$$

这个模型是否与实际相符呢？让我们利用模型算出 $k=0,1\cdots,38$ 的概率值 $P\{X=k\}$ 的具有 k 个格子的数目 $20P\{X=k\}$（如下表）来检验是否与上表中第二栏数字相符。

k	$P\{X=k\}$	$20P\{X=k\}$	格子数目	上表中格子数
0	0.142	2.84	3	3
1	0.285	5.70	6	6
2	0.277	5.54	5	5
3	0.175	3.50	4	4
4	0.081	1.62	1	1
5	0.029	0.58	0	0
6	0.008	0.02	0	0
7	0.002	0.00	0	-

检验结果基本上符合实际。这个模型是可取的，以后遇到类似问题可以用 Bernoulli 概型来处理。

模糊数学是 Zadeh 于 1965 年创立的。隶属函数、模糊关系揭露了模糊现象的本质以及数和质的紧密依赖关系，解决了经典数学所难于解决的问题，开辟了数学模型的新领域。

以后 Zadeh 又提出隶属原则、分解定理、拓张原则，并导出模糊方法，不仅拓展了模糊数学的研究对象，对人工智能、控制论、系统分析起到了促进作用。机器模式识别、图象识别、手写体识别、指纹识别、语言语音识别等大都是人力所难于辨别的，借模板匹配原理用机器加以识别将更加准确迅速，巧夺天工，为减轻人的劳动作出了贡献。

人们对有色光的认识是从视觉直接感知的。能否数学化建立有色光的数学模型呢？经过一个较长的探索过程后物理学深人研究波长，发现

$$\text{红光波长} \in [6500, 8000],$$
$$\text{绿光波长} \in [4600, 5700],$$
$$\text{蓝光波长} \in [4300, 4600]。$$

从定性分析走向定量分析，找到了有色光分类的依据，可见没有数量就没有质量，定性要以定量为基础。模糊数学进一步利用隶属函数，建立了有色光的数学模型：

$$\mu_{\text{红}}(\lambda) = e^{-\left(\frac{\lambda - 7000}{600}\right)^2},$$

$$\mu_{\text{绿}}(\lambda) = e^{-\left(\frac{(\lambda - 5400)}{300}\right)^2},$$

$$\mu_{\text{蓝}}(\lambda) = e^{-\left(\frac{(\lambda - 4500)}{200}\right)^2}。$$

生物数学出现后数学化方法又有新的发展。生物学中的亲缘关系、遗传性、变异性、昆虫翅的分类、植物花冠的分类、生物体内组成蛋白质的各种成分、细胞的图象、植物叶片的形状等都是离散的，它所建立的数学模型也必须是离散的。昆虫的

翅分直翅、膜翅、鞘翅、鳞翅，又如何数学化呢？植物的花冠分蝶形、唇形、舌形，又如何用数值表征呢？生物体内组成蛋白质的各种氨基酸等都是不能用实数来表示的，简称为非数值特性。

生物学非数值特性中有一种常见的两个对立面状态的二元不连续特性，如脊椎动物与无脊椎动物，神经组织的传递功能是处于兴奋状态还是抑制状态等。这类二元不连续性可以用布尔代数来描述。

关于多元不连续特性可以用模糊数学来描述，或是用图论、模糊图论、拓扑学来描述。1969年法国人R.Thom的突变论（Catastrophe theory）从拓扑学提出一种几何模型能描绘多维不连续现象，可以解决生物学中非数值特性的困难。

事物的变化是复杂的，有些是连续的，如位移、运动、热传导等，也有些是离散的，如生物繁殖、细胞分裂等。数学分析经Cauchy、Weierstrass的完备极限理论以后，把离散现象理解为连续性的，也考虑不连续性，那只是少数的奇点。Thompsen说："不连续的原理是我们所有学科种类中的固有性，不管是数学的、物理学的还的生物学的。"这就打破了连续理论的统治。分子学说的确立，说明物质是不连续的。普朗克能量量子的假设，说明能量分布的不连续性。孟德尔的遗传理论打破了生物学中物种进化连续性的观点。哲学中质变的飞跃，也意味着运动的不连续性。过去数学从离散走向连续，现代数学又从连续走向离散，都是科学发展的必然趋势。

5.2 数学化方法对医学进展的影响

1986年又应广东省科委的邀请作了《数学化方法对医学进展的影响》的报告，改写的论文刊登在《中华医学杂志》（1992年72卷11期）。将报告与论文摘要如下：

19世纪以前，生物学、医学与数学的联系较少。以后由于生物学与医学从定性研究发展到定量研究，没有数学很难前进，从而促使了生物学、医学与数学的联系。后来由于电子计算机的应用，它们的结合渗透与日俱增，目前已出现医学数学化的国际趋势。

本文将从医学数学化的角度阐述数学化方法对医学进展的影响。实际上这两个学科的进展是相辅相成的，数学也由于它在医学上的应用而壮大和发展了自己。

概率统计方法与基因频率的稳定性

医学家Hardy、Weinberg在构成孟德尔遗传定律的有性生殖的生物群体中，研究了等位基因和由等位基因组合所产生的基因型频率的关系，认为一个大的随机交配群体，在没有迁移、突变和选择的情况下，基因频率与基因型频率在历代中都是恒定的。这一现象可从数学上得到证明。

设一对等位基因 A、a 出现的频率分别为 p,q(= 1 - p)。可能出现的三种基因型是 AA,Aa,aa,它们的频率分别为 $p^2,2pq+q^2,q^2$,总频率为

$$p^2+2pq+q^2=(p+q)^2=1,$$

而子代的基因频率为

$$A:p^2+\frac{1}{2}\cdot 2pq=p(p+q)=p;$$

$$a:q^2+\frac{1}{2}\cdot 2pq=q(q+p)=q\ 。$$

与亲代基因频率完全相同。

随机交配群体中基因频率可由下表计算出来:

交配型 ♀♂	交配频率	子　代　中 AA	基因型 Aa	频率 aa
AA × AA	$p^2\times q^2$	p^4	0	0
$AA\times Aa$	$p^2\times(2pq)$	p^3q	p^3q	0
$AA\times aa$	$p^2\times q^2$	0	p^2q^2	0
$Aa\times AA$	$(2pq)\times p^2$	p^3q	p^3q	0
$Aa\times Aa$	$(2pq)\times(2pq)$	p^2q^2	$2p^2q^2$	p^2q^2
$Aa\times aa$	$(2pq)\times q^2$	0	pq^3	pq^3
$aa\times AA$	$p^2\times q^2$	0	p^2q^2	0
$aa\times Aa$	$q^2\times(2pq)$	0	pq^3	pq^3
$aa\times aa$	$q^2\times q^2$	0	0	q^4
合　计	$(p+q)^4=1$	$p^4+2p^3q+p^2q^2=$ $p^2(p^2+2pq+q^2)=p^2$	$2pq$	q^2

以上说明在遗传过程中基因频率与基因型频率保持固定不变的平衡状态,保持生物种属的相对稳性。

数学物理方法与微生物菌落的增长

17 世纪时物理学是带头学科,人们把数学家用来研究现实问题所用的方法统称为数学物理方法。18 世纪中叶流行一种看法:自然科学上的任何问题只要给出正确的描述(即现在说的数学化),就可以借助于当时发展起来的微积分和微分方程而获得解决。可见当时数学物理方法的普遍性和权威性。

在生物界,微生物具有很高的繁殖速度。以大肠杆菌为例,在 37℃ 下培养的

牛奶中，分裂一次需 12.5 分钟。若以 20 分钟分裂一次，一个细菌经 24 小时后可产生 4.722×10^{21} 个后代，总重量可达 4.722 吨。但实际上一个培养基因细菌往往因缺乏空间、缺乏养分以及毒物出现，培养基 PH 值变更，不会无限制生长。用数学物理方法，在一个培养基内，设任何时刻 t 的微生物群体含量 $N(t)$ 满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = kN - \beta N^2 \qquad (k > 0, \beta > 0),$$

式中 kN 表净增长率（出生率超过死亡率的部分），$-\beta N^2$ 表示：如果毒物在细胞间培养基作普遍扩散，则任一细胞会察觉到全部 N 个细胞的累积中毒效应，全部 N 个细胞的中毒效应是一个细胞上效应的 N 倍，正比于 N^2。

将原方程改写成

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = kN\left(1 - \frac{\beta}{k}N\right),$$

令

$$\frac{k}{\beta} = N_e,$$

则

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = kN \cdot \frac{N_e - N}{N_e}, \quad \frac{N_e \mathrm{d}N}{N(N_e - N)} = k\mathrm{d}t \ 。$$

设 $t = 0$ 时，$N = N_0$，两边积分

$$\int_{N_0}^{N} \frac{N_e \mathrm{d}N}{N(N_e - N)} = \int_0^t k\mathrm{d}t,$$

$$[\ln N - \ln(N_e - N)] \Big|_{N_0}^{N} = kt \Big|_0^t 。$$

解出

$$N = \frac{N_0 Ne}{N_0 + (N_e - N_0)\mathrm{e}^{-kt}} 。$$

当 $N_0 < N_e$ 时，$N < N_e$，微生物菌落增长曲线为 S 形曲线，即随 t 的增长，菌落增长逐渐上升到接近 N_e 的水平，并在该水平保留一段时间的缓慢上升，且不超过 N_0；

当 $N_0 > N_e$ 时，$N > N_e$，菌落增长表现为向平衡值 N_e 作简单衰减，可表现出当培养基条件渐渐不适应于微生物菌落生长时，细菌死亡率超过了出生率的状况。

医学上，Grompertz 细胞增长模型、Muench 流行病模型、Mitscherlich 种群生长模型、Monnier - blair 神经刺激理论模型都是运用数学物理方法的产物。如果没有数学这个工具，这类隐蔽的医学规律，将无从出现，人类只能被动地接受“制裁”而无法获得自由。

观察实验方法与繁殖率

13 世纪时欧洲有一著名而有趣的难题：假定一对成熟的兔子（雌雄各一）每月产一对小兔，新生的小兔在 2 个月后成熟，并可继续再产小兔。如何计算兔子的繁

殖率?

对于这个问题,先要知道什么是繁殖率。在当时由于数学的局限是无法定义的。我们用现在的知识来回答这个问题。

首先观察实验积累资料。设有雌雄各一的一对小兔 A,假定第二代小兔 A_1 也是雌雄各一(由于要求繁殖率,这种假定并不失之偏颇)。观察它的繁殖情况如下:

月									对数
1	A								1
2	A								1
3	A	A_1							2
4	A	A_1	A_2						3
5	A	A_1	A_2	A_3	A_{11}				5
6	A	A_1	A_2	A_3	A_{11}	A_4	A_{12}	A_{21}	8
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

其次分析资料探讨规律。从"对数"栏看出数列 1,1,2,3,5,8,初步发现规律:

$$1+1=2,1+2=3,2+3=5,3+5=8\text{。}$$

是否在第 7 个月有 $5+8=13$ 呢?

验证第 7 个月兔子的情况:

$$A,A_1,A_2,A_3,A_{11},A_4,A_{12},A_{21},A_5,A_{13},A_{22},A_{31},A_{111}\text{。}$$

对数确为 13,于是知道一般规律是

$$a_{n+1}=a_n+a_{n-1},n=2,3,4,\cdots$$

并发现这就是 13 世纪的菲波那契(Fibonacci)数列

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,\cdots$$

最后推导兔子的繁殖率。令

$$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n},\qquad (*)$$

计算数列 $\{b_n\}$:

$$1,2,1.5,1.66,1.6,1.625,1.615,1.619,1.617,1.618,1.618,\cdots$$

发现 $\{b_n\}$ 可能收敛于 1.618。进一步验证,并求 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$。如果存在,设为 b,这就是繁殖率的定义。

因 $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$,有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\text{。}$$

由(*)知

$$b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}},$$

当 $n \to \infty$ 时,$b_n \to b$,$b_{n-1} \to b$,于是

$$b = 1 + \frac{1}{b}$$

即 $$b^2 - b - 1 = 0\text{。}$$

∵ $$b > 0,$$

∴ $$b = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = 1.618034\cdots$$

即为所求兔子的繁殖率。

观察实验方法对于医学科研有着广泛的实用价值。如果缺乏数学化的思想方法和一定的数学知识,要探求新的数量规律是不可能的。冯·诺依曼教授说:"在现代实验科学中能否接受数学方法,也愈来愈成为该学科成功与否的主要标准。"

回归分析法与医学经验公式

医学中有些行之有效的经验公式,给医学的定量化提供了可靠的途经。如:

妇女正常收缩压(y,mmHg)与年龄(x,岁)的关系:

$$y = 1.4x + 64, \qquad (30 \leqslant x \leqslant 80);$$

小儿体重(x,kg)与体表面积(y,m^2)的关系:

$$y = 0.035x + 0.1, \qquad (x \leqslant 40kg);$$

人的身高(x,m)与脉搏率(y,次/分)的关系:

$$y = 94\sqrt{x}, \qquad (x > 0);$$

儿童食管长度(y,cm)的检测公式:

$$y = 1.09x + 18.83, \qquad (0.5 \leqslant x \leqslant 18\text{ 岁});$$

学龄前儿童的智能检测公式:

$$y = -2.44x^2 + 31.26x - 58.98, \quad (4 \leqslant x \leqslant 7\text{ 岁})$$

等等。这些经验公式都先有一定的检测数据,利用数学中的回归分析法获取结论并得到检验,具有一定的医疗参考价值。

国际上已开展对病历档案的统计研究,从中发现不少隐蔽的规律,为人类的健康作出了贡献。

曲线拟合法与数学模拟

曲线拟合法是生物数学中常用的方法,是将生物医学问题的研究传化为数学模型的研究,是一种现代的科研方法。其步骤大致如下:

(1)从医学问题的实例入手,作观察实验,测得 $x-y$ 的数据组;

(2)描散点图,连成一条平滑曲线(称实际曲线);

(3)从理论上建立数学模型,并根据实际曲线的关键特征(如拐点、极值、渐进线等)指导修正模型;

(4)从理论模型算出新的数据值(称对照组),作散点图,画出理论曲线;

(5)检验理论曲线与实际曲线吻合的程度(作图检验或统计检验);

(6)确定理论模型(或经验公式)。

模型方法与医疗诊断

医疗诊断的过程是一个复杂的过程,无论是病人的主诉、医生的观察与检查,还是对病源的探讨以及诊断的确定,都带有一定的模糊性。医学上的模糊概念与推理也比较多,因此模糊数学应用于医学的前景是十分广阔的。

过去,医学界鉴于经典数学与二值逻辑不能正确反映医学实际,创造出一些医学术语,如对疾病给出程度上的差别,规定阴性(-)、弱阳性(+)、双阳性(++)、强阳性(+++),这四级比有病无病两级更为合理,对视力划分为0.1,0.2,…,1,1.2,1.5十二级,这实际上已是模糊数学中隶属度的含义。用模糊数学定义医学概念,揭示医学规律,必然顺理成章,易为医学界所接受。

根据医学知识,心脏的能量消耗,氧化脂肪(x_1)占58%,糖(x_2)占30%,氨基酸(x_3)占5%,酮体(x_4)占7%,按照模糊集的概念,可以定义

$$[\text{心脏的能量消耗}]=\frac{0.58}{x_1}+\frac{0.30}{x_2}+\frac{0.05}{x_3}+\frac{0.07}{x_4}。$$

北京中医医院关幼波教授用同样的方法表示脾虚型迁延性肝炎病 $\underset{\sim}{A}$:

$$\underset{\sim}{A}=\frac{0.3}{GPT\text{异常}}+\frac{0.2}{3T\text{高}}+\frac{0.2}{\text{纳呆}}+\frac{0.5}{\text{脘腹胀}}+\frac{0.4}{\text{肠鸣}}+\frac{0.1}{\text{苔薄白}}+\frac{0.4}{\text{矢气多}}+\frac{0.4}{\text{完谷不化}}$$
$$+\frac{0.4}{\text{乏力}}+\frac{0.4}{\text{便漏}}+\frac{0.2}{\text{舌边有齿痕}}+\frac{0.3}{\text{脉沉缓}}+\frac{0.2}{\text{肝区累后疼}}+\frac{0.1}{\text{怕冷}}$$
$$+\frac{0.3}{\text{月经错后与色淡(淋漓不止)}}+\frac{0.1}{\text{嗳气}}。$$

他的肝病模型已作为专家系统制成软件,用于计算机问诊,引起国际上医学界的重视。

上面讨论了经典数学、统计数学、生物数学与模糊数学中的几种数学化方法。显示出数学在医学上作为思想方法、推理与计算等方面是不可缺少的工具,有数学和无数学,在医学进展以及医学现代化上是举足轻重的。马克思在一百多年前就告诫我们:"一种科学只有在成功在运用数学时才算达到了真正完善的地步。"在当前现代医学科技迅速发展的时代,医务工作者必须具有数学方法和思想的良好训练,才能适应时代的要求,更好地推动我国医学科学的发展。

6 医学数学化

1988年我写了一篇《论医学数学化》的论文在北京会议上发言，以后又在广州、厦门的会议上作报告，刊登在《数理医药杂志》（1990.三.2）上。《中国教育报》（1991.1.26）刊登了《医学数学化的崛起》的文章，《人民日报海外版》（1991.2.28）转载时的题目是《医学——数学化》。1993年又写了《论医学数学化的基本途径》，刊登在《益阳师专学报》（1993年第10卷第6期）。2002年我因病住院，时已年近九旬，无法继续研究，想将自己心得写出来留给后人研究，于是又写了一篇《关于医学数学化的研究》。现将这篇未发表的文章记在下面，可能有重复之处，望读者谅解。

1987年“春风又绿江南岸”。我从湖南师范大学来到湖南医学院教医科研究生高等数学。我不懂医，数学如何为医学服务，胸中无底，不得已求教于图书馆，在外文书中发现美英法等国早已利用数学研究医学，前进步伐很快，且提出改造医学使其数学化。我在这一思想的指导下进入了医用数学之门，也写了几本有关的书。

一晃二十多年过去了，没有做出什么成就，加以年过八旬，又缺助手，只得半途而废，成为终身遗憾。但我相信医学数学化的东风一定会到来，谁解决得好，有可能获诺贝尔医学奖。我国已将科技兴国作为奋斗方向，更希望这个奖能落在我国。因此想将我研究的过程作一概述，或许可以吸引后来者的兴趣，继承这个问题的研究。我国曾是“医学王国”和“数学王国”，这两者的结合，肯定会“1+1>2”，有厚望焉！

6.1 科学数学化

据联合国教科文组织1983年的调查报告：“目前科学研究工作的特点之一是各门学科的数学化（Mathematizing），它已成为科学发展的历史潮流。”这句新颖的话引起我的惊奇和兴奋。在克莱因《古今数学思想》16章科学的数学化一节中查到笛卡尔（1596~1650）的话：“科学的本质是数学。”“世界是可以认识的，并可归结到数学……一切现象都可以用数学描写出来。”这就是说，数学可以描述科学概念，可以推理论证，可以构成新的理论。这正是人工智能的三大技术：

知识表示技术、推理论证技术和系统构成技术，换言之，这就是数学化。

物理学最先接受这个思想。牛顿（1642～1727）把物理学从量的分析表述为数学模型，通过推理计算建立新的理论。他用数学来定义物理概念，用数学公式来描述物理规律，如：

$$速度\ v=\frac{ds}{dt}，加速度\ a=\frac{d^2s}{dt^2}，力\ F=ma，\cdots\cdots$$

把自然现象放在数学控制之下，使物理学从头至尾都用数学来描述、计算和推理，使物理学数学化。物理学家伽里略、刻普勒等建立了一种信念："自然界是用数学设计的，必须用数学家搞数学的程序去进行科学研究，才能真实地揭示自然界的规律。"因而在十八九世纪物理学成为带头学科，又给其他学科以重大启示，天文学、化学、工程学、人工智能、计算机科学都获得了重大的发展，被誉为"插上了数学翅膀"，这些进展被称为科学数学化的潮流。现在经济学、管理科学、生物学等也正走向健康发展的道路。科学数学化之路可以归结为：现象→观察发现问题→实验分析→假说（前科学）→数学化→数学模型→反馈检验修正→真理（科学）

6.2 医学数学化的浪潮方兴未艾

科学数学化的浪潮正在波及生物学和医学，统计学率先进入生物医学。孟德尔（1822～1884）在科学实验的基础上利用统计方法找到了遗传定律：显性性状与隐性性状数量之比近似等于3：1。但他不能确定这个比值是精确的，还缺乏理论依据，仍是前科学。15年后有人将这个问题数学化，设植株的每种特性由两个遗传因子决定，一个是显性因子 R，另一个是隐性因子 r，它们随机交配，可用数学式表示：

$$(R+r)(R+r)=RR+Rr+rR+rr\to R+R+R+r=3R+r,$$

这就证明了显性与隐性概率之比为3：1。孟德尔遗传定律就升华为科学了。

我在 Defards、Snedden 著作中找到了上世纪30年代医学家 Hoorweg、Weiss、Blair 等研究神经刺激理论运用微分方程将医学问题数学化，获得了神经刺激现论的数学模型：

$$\varepsilon=\frac{mv}{k}\ (i-e^{-kt})。$$

ε 表刺激电流量，i 表刺激电流。

1970年前医学科研就达到了如此水平，现在医学和数学更发展了，其前景必更加辉煌。

我在《生物医学数学模型》一书中介绍了上世纪医学与数学相结合的成果，

如：

1939 年 Mitscherlich 提出的生物种群生长模型：

$$N = B\ (1 - e)^{-at}\ ;$$

马尔萨斯人口模型

$$N\ (t)\ = N_0 e^{(k_1 - k_2)(t - t_0)},$$

和修正后的 Logisric 人口模型

$$N = \frac{k}{1 - \left(1 - \frac{k}{N_0}\right) e^{-rt}} 。$$

按这个模型，我国 1982 年人口普查统计：

$$N_0 = 10.3 亿,$$

到 2000 年要使人口控制在 12 亿，r 应为 0.05%，即人口增长率应控制在 0.05% 以内，与实际相符。

回归分析在医学科研中用得更多，我校研究生对临床 8 例患者血清脂蛋白测量，从以下数据作线性回归：

β (mg%)	460	480	476	490	510	520	470	465
α (mg%)	240	220	230	210	190	183	215	235

依最小二乘方法得经验公式

$$\alpha = -0.8893\beta + 645.82,$$

知 β 脂蛋白与 α 蛋白呈负相关，与实际相符，当 $460 < \beta < 520$，还可估计 α 值。

如果资料所示的图象不是直线而呈抛物线，则可作抛物线回归，令

$$y = ax^2 + bx + c;$$

如果资料所示的图象呈指数增长，则可以指数回归，令

$$\lg y = ax + b,$$

确定 a，b 后可得

$$y = y_0 e^{-kx} 。$$

病历档案有大量资料可作类似分析，获得所需的经验公式，可作临床诊断的参考。

矩阵代数也可用于医学科研，如传染病接触情况可作矩阵表示。

设有甲乙二人患乙型肝炎，先调查 I 组 5 人与甲乙两个感染者有无接触，有记为 1，无记为 0 得

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
甲	1	1	0	0	1
乙	0	1	1	1	0

记 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&1&0\end{pmatrix}$；

再调查Ⅱ组6人与 *I* 组5人的接触情况，得

	$Ⅱ_1$	$Ⅱ_2$	$Ⅱ_3$	$Ⅱ_4$	$Ⅱ_5$	$Ⅱ_6$
$Ⅰ_1$	0	0	1	0	1	0
$Ⅰ_2$	0	0	1	1	0	0
$Ⅰ_3$	1	0	0	0	0	1
$Ⅰ_4$	0	0	1	1	0	0
$Ⅰ_5$	0	1	0	1	0	1

记 $B=\begin{pmatrix}0&0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0&0\\1&0&0&0&0&1\\0&0&1&1&0&0\\0&1&0&1&0&1\end{pmatrix}$。

Ⅰ组与感染者的直接接触以及Ⅱ与Ⅰ的接触都称一级接触，Ⅱ组与感染者的间接接触称二级接触，如何考虑两个感染者与Ⅱ组的二级接触呢？对医学来说这是个难题，而对于数学来说，却容易解决，因为矩阵的乘法规定

$$A\cdot B=(\quad)_{(2\times5)}\cdot(\quad)_{5\times6}=(\quad)_{2\times5}$$

容易看出它们的框架是

	$Ⅰ_1\cdots Ⅰ_5$
甲 乙	*A*

。

	$Ⅱ_1\cdots Ⅱ_6$
$Ⅰ_1$ ⋮ $Ⅰ_5$	*B*

⇒

	$Ⅱ_1\cdots Ⅱ_6$
甲 乙	*A·B*

于是

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&1&0\end{pmatrix}_{2\times5}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0&0\\1&0&0&0&0&1\\0&0&1&1&0&0\\0&1&0&1&0&1\end{pmatrix}_{5\times6}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&2&2&1&1\\1&0&2&2&0&1\end{pmatrix}_{2\times6}$$

这个 2×6 矩阵正反映两个感染者与Ⅱ组6人的二级接触情况：

	$Ⅱ_1$	$Ⅱ_2$	$Ⅱ_3$	$Ⅱ_4$	$Ⅱ_5$	$Ⅱ_6$
甲	0	1	2	2	1	1
乙	1	0	2	2	0	1
总数	1	1	4	4	1	2

这个例子很富于创造性，它表明医学上不易解决的问题，借数学可望获得解决。我用这个例子讲矩阵的乘法，研究生听了，十分振奋。

关于遗传基因的概率矩阵的研究。

设有两个基因型 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$，在自受精的条件下，如果基因型是 $\boldsymbol{A}$，则表现型必为 $\boldsymbol{A}$，即概率为 1，如果基因型是 $\boldsymbol{B}$，则表现型可能是 $\boldsymbol{A}$，可能为 $\boldsymbol{B}$，即出现 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 的概率各为$\frac{1}{2}$，即把它记为矩阵

		表现型	
		$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$
基因型	A	1	0
	B	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$\boldsymbol{P}_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

如果一个矩阵的元素∈［0，1］，且每一行的元素之和（横加）等于 1，则称此矩阵为概率矩阵。现在研究下一代的自交，基因 A 仍将保留，即出现 A 的概率为 1，出现 B 的概率为 0；而基因 B 中的一半将保留，另一半将变成 A，即出现 A 的概率为$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$，出现 B 的概率为$\frac{1}{4}$，即

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}。$$

这个问题正是把上代的表现型作为新的基因型，符合矩阵乘法的框架，因而

$$\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_0\cdot\boldsymbol{P}_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}。$$

同样考虑下一代的自交，于是

$$\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{P}_0^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{7}{8} & \frac{1}{8}\end{pmatrix}。$$

如此继续下去，经过 $\boldsymbol{n}$ 代自交后

$$\boldsymbol{P}_n=\boldsymbol{P}_0{}^{n+1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\end{pmatrix}。$$

当繁殖世代变得充分大时，即 $n\to\infty$，矩阵逼近稳定矩阵

$$\boldsymbol{P}_\infty=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}。$$

这就是说，繁殖无限地进行之后，只有 **A** 型保留，而 **B** 型将消失。

生物学和医学中有些问题涉及无限的概念，用数学表示将易于获得结果，而且科学有据。

优选法对医学研究也是可行的。《生物医学数学模型》书中还介了乳化油脂加减量优选、土霉素片淀粉用量的优选、谷氨酸收率因素碱洗浓度的优选、苯甲醇浓度的优选、鉴定菌培养温度的优选等。

生物数学用微分方程组描述两个群体相互作用的生态模型。1956 年 Blaxter、Graham、Weinmam 提出了反应动物关于食物通过消化道的数学描述，Latka、Volterre 提出捕食生态系统，Gompertz 提出生长模型，Fick 用偏微分方程描述扩散现象，Michaelis、Menten 用微分方程组研究酶动力学，为生物现象的数学化开拓了新途径。

以上所述，涉及医学的许多部门，所用的数学遍及经典数学、统计数学、生物数学、矩阵代数。它们如雨后春笋，蓬勃发展，给医学、生物学与数学都获得新的进展。但还不能说医学数学化，也不能说医学界很重视数学，或数学界也重视医学这个载体，学数学的不懂医学，学医学忽视数学的现象还很普遍。但是，它揭示了医学数学化的前景如旭日东升方兴未艾，是很值得庆幸的。

6.3 医学数学化的设想

伽利略（1564～1642）认为任何科学分支应效法数学，从公理定义出发，通过演绎推理而建立新的真理，认为数学的体系和结构是完美无缺无隙可乘的，科学要臻于完善，必须把数学纳入自己的范畴，仿照数学的结构，借数学的推证来改造科学。这就是科学数学化，它包括科学知识结构的改造。物理学做到了。1983 年美国科学家 W.Fred 提出医学数学化（Mathematizing of medicine），最先在美国医学杂志上发表。还有专家提出，现代医学要上两个水平，分子化水平（Medecular level）和数学化水平（Mathematizing level），前者开辟了生命系统微观的新前景，而后者将开辟医学体系理论结构的新前景。

近 30 年现代医学迈出了两个引人注目的步伐，为医学数学化指引了航程。第一是医疗诊断专家系统（Specialistic system），如美国拉特格斯大学的病因相联模型（CASNET）、匹兹堡大学的内科病诊断系统（INTERNISP）、麻省理工学院的肾脏病诊断系统（PIP）、肺病诊断系统（TEIRESTAS）等，它们都是以数学化为前提、电脑为工具，充分发挥医学理论与技术的典范。它们的模式是

专家治病的经验→数学化→电脑学习→反馈修正→专家系统→电脑问诊

把诊断提高到专家水平，降低了误诊率，发展了医药科学。

第二，1985 年医学诺贝尔奖授予瑞士数学家 Jerne。主要成果是《免疫网络

结构理论》。他提出了现代医学科研的新模式：

医学免疫问题→数学化（知识表达技术）→电脑完成计算与论证（机械化推理技术）→反馈修正→免疫网络结构理论（系统构成技术）

这个模式集医学、数学、电脑于一体，必将推动医学的突破性进展，也揭示了医学数学化的必要性与必然性。

从以上事实获得启示：一是医学必须依靠电脑加强自身的运行机制才能现代化，而电脑的运用，必须依靠数学化。学医不学数学是不行的。二是医学数学化必须改革医学的理论结构，像物理学那样，从概念的定义、规律的表示以及推理运算都依靠数学，使医学从经验的范畴，迈向严密科学的范畴。

关于医学理论结构的改革是一大难点，有如“蜀道之难，难于上青天”。难道我们就不入川了吗？下面就某些实际问题来作探讨。

6.4 医学概念的定义问题

给概念下定义，可否从它的质和量上着手。这里利用模糊数学来解答这个问题。模糊数学是研究模糊领域中事物数学化的一门现代数学，开拓了数学的思维方法、逻辑范畴和应用领域，而医学中的模糊概念最多，利用模糊数学有其独到之处。下面的例子很不成熟，作为一家之言，抛砖引玉而已。

【例 1】 前面提到全心衰竭也是模糊概念，可以根据它的症状和这些证状构成全心衰的程度来表征。

$$[\text{全心衰竭}] = \frac{0.4}{\text{恶心呕吐}} + \frac{0.6}{\text{窦性心动过速}} + \frac{0.2}{\text{窦性心动过缓}} + \frac{0.6}{\text{心房颤动}} + \frac{0.4}{\text{窦性早搏}} + \frac{0.4}{\text{房室传导阻滞}} + \frac{0.5}{\text{房室心动过速}} + \frac{0.1}{\text{黄视绿视}}$$

$$= (0.4,\ 0.6,\ 0.2,\ 0.6,\ 0.4,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.1)$$

又如动物实验中标准休克状态可表为模糊了集

$$\underset{\sim}{B} = \frac{0.6}{\text{血压下降}} + \frac{0.2}{\text{心平加快}} + \frac{0.3}{\text{脉膊细数}} + \frac{0.3}{\text{四肢潮冷苍白}} + \frac{0.3}{\text{紫绀}} + \frac{0.5}{\text{静脉萎陷}} + \frac{0.2}{\text{尿量减少}} + \frac{0.4}{\text{反应迟钝}} + \frac{0.4}{\text{神态模糊}}$$

只要掌握模糊概念的质和量就可以定义这个概念，其中质由医理决定，量由实际与经验确定。

还有所谓人载集，也可用于医学概念的定义，如

【例 2】 男性性成熟的数学模型。

男性一般在 10 岁开始到 20 岁成熟，即与年龄的关系如哥西分布。可给出隶属函数

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\left[\dfrac{2(x-10)}{7}\right]^{-4}} & ,\ 10 \leqslant x \leqslant 20 \\ 0 & ,\ 0 < x < 10\end{cases}$$

计算其分布列：

x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
μ	0	0.007	0.1	0.35	0.63	0.81	0.90	0.94	0.96	0.98	0.99

性成熟过程的模糊子集可定义为

$$[\text{性成熟}]=\frac{0.1}{12}+\frac{0.35}{13}+\frac{0.63}{14}+\frac{0.81}{15}+\frac{0.90}{16}+\frac{0.94}{17}+\frac{0.96}{18}+\frac{0.98}{19}+\frac{0.99}{20}。$$

从截集取 $\lambda=0.9$ 得

$$\{\text{性成熟}\}_{0.9}=\{16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20\},$$

即 $\mu=0.9$ 以上的隶属度都取值 1，其元素 x_i 都是集中的元素，即隶属度在 0.9 以上，16－20 岁都算性成熟。符号 [ ] 表模糊集，{ } 表截集是普通集。这里用年龄取代了性成熟的因素，即用年龄或时间取代了质。

6.5 医学概念的映射问题

现在讨论症状集与疾病集的映射（或关系）。如何用数学来表述这种关系呢？

医疗诊断的过程，可以认为是从症状集（Symptoms set）$S=\{s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n\}$ 到诊断集（或疾病集 Diagnosis set）$D=\{d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_m\}$ 的映射。它是一种模糊关系。如果经临床检验行之有效，可作为专家系统（或专家咨询系统），输入电脑可取代专家诊断，打破医学上黑箱之迷，以提高诊断水平。

【例 3】 临床上经过 X 线透视检查发现病人有肺部肿块，但属于哪一种疾病难于鉴别。根据胸外科理论与经验，从病例中整理出从症状集 S 到疾病集 D 的模糊关系 $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$：

$\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ \ D / S	d_1 肺癌	d_2 肺 TB	d_3 炎症	d_4 良性肿瘤
s_1 发热	0.4	0.5	0.8	0.2
s_2 脓痰	0.4	0.7	0.8	0.2
s_3 肺湿啰音	0.2	0.4	0.7	0.1
s_4 痰中有癌细胞	0.9	0.1	0	0
s_5 痰中有抗酸菌	0.1	0.8	0.1	0.1
s_6X 线片见分叶状	0.7	0.3	0.3	0.3
s_7X 片见卫星病灶	0.3	0.7	0.4	0.1

$\underset{\sim}{R}$反映了一种结构关系，即由 s_1，s_2，…，s_7 在数量上的差别，可以划分出 d_1，d_2，…，d_4 几种类似的疾病，因而 $\underset{\sim}{R}$ 可以视为医理咨询系统，成为专家系统。$\underset{\sim}{R}$可用模糊矩阵表示

$$\underset{\sim}{R}=\begin{pmatrix}0.4 & 0.5 & 0.8 & 0.2\\ 0.4 & 0.7 & 0.8 & 0.2\\ 0.2 & 0.4 & 0.7 & 0.1\\ 0.9 & 0.1 & 0 & 0\\ 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0.1\\ 0.7 & 0.3 & 0.3 & 0.3\\ 0.3 & 0.7 & 0.4 & 0.1\end{pmatrix}。$$

从这一矩阵可以定义肺癌、肺 T.B.：

$$[肺癌]=(0.4,\ 0.4,\ 0.2,\ 0.9,\ 0.1,\ 0.7,\ 0.3)$$

$$[肺\ T.B.]=(0.5,\ 0.7,\ 0.4,\ 0.1,\ 0.8,\ 0.3,\ 0.7)$$

这种 n 维模糊向量

$$\underset{\sim}{A}=(\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots,\ \mu_n)$$

是一种简单的模糊关系，其框图是

	症状
病人	$\underset{\sim}{A}$

这又是一种模糊概念的定义方法，是借模糊关系来表示的。

6.6 医疗诊断决策问题

科学决策意味着决策的定量化、最优化、模型化和程序化，它的模式一般是

管理问题→数学化→模型→检验与评价→决策

医疗诊断也是一种决策，诊断错了就构成失误或医疗事故，影响生命财产，必须把诊断建立在科学决策的基础上。

法国生物学家数学家沙捷斯（E.Sanchez）从专家经验和大量病例中总结出 S 到 D 的模糊关系 $\underset{\sim}{R}$：

$\underset{\sim}{R}$ \ D / S	d_1	d_2	…	d_m
s_1	r_{11}	r_{12}	…	r_{1m}
⋮	⋮	⋮		⋮
s_n	r_{n1}	r_{n2}	…	r_{nm}

$$\underset{\sim}{R}=(r_{ij})_{n\times m}=\left\{\frac{r_{ij}}{(s,\ d)}\right\}(s,\ d)\in S\times D\},\qquad r_{ij}\in[0\quad 1]。$$

$\underset{\sim}{R}$为医学知识库，可以为医疗诊断的专家系统，将$\underset{\sim}{R}$贮存在电脑内。

设某一病例病人的症状、体征检查构成一模糊子集

$$\underset{\sim}{A}=(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n),\qquad s_i\in S$$

则由$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{R}$合成（compasition）的关系矩阵

$$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{B}$$

就给出了该病人的诊断方案，只要将$\underset{\sim}{A}$输入到已贮存$\underset{\sim}{R}$的电脑，输出就是$\underset{\sim}{B}$，示意如框图：



	症状
病人	$\underset{\sim}{A}$

∘

	诊断
疾状	$\underset{\sim}{R}$

⇒

	诊断
病人	$\underset{\sim}{B}$

此模型称为沙捷斯模糊决策模型（或诊断模型）。沙捷斯在北京讲学时，讲了这个问题，但那时听起来专家系统还不很明确（那时还不知道有专家系统）。

这个模型又可作鉴别诊断（Diffrential diagnosis）。

【例4】　脑出血与蛛网膜下腔出血的鉴别。

设要求鉴别的疾病集 $D=\{d_1$（脑出血），d_2（蛛网膜下腔出血）$\}$，症状集 $S=\{s_1$（头痛），s_2（呕吐），s_3（偏瘫），s_4（脑膜刺激症），s_5（瞳孔不等大）$\}$。

根据医学知识得出 S 到 D 的模糊关系$\underset{\sim}{R}$：

$\underset{\sim}{R}$ D / S	d_1	d_2
s_1	0.4	0.8
s_2	0.5	0.5
s_3	0.7	0.2
s_4	0.2	0.7
s_5	0.5	0.1

设病人在 S 集上可表为

$$\underset{\sim}{A}=(0.3,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.4,\ 0.3),$$

由
$$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}=(0.5,\ 0.4)\ 。$$

因 $0.5>0.4$，知病人患脑出血的可能性较大。

这个模型也可作为医疗评价（Evaluation）。

【例 5】 卫生营养的评价。

设膳食中营养因素集

$$X = \{蛋白质, 脂肪, 糖类, VA, VC\},$$

评判等级集

$$Y = \{充裕, 正常, 不足, 缺乏\},$$

X 对 Y 的模糊关系根据营养学评定为 $\underset{\sim}{R}$

$\underset{\sim}{R}$ \ Y / X	充裕	正常	不足	缺乏
蛋白质	0.3	0.3	0.2	0.2
脂　肪	0.5	0.3	0.2	0
糖　类	0.4	0.3	0.2	0.1
VA	0.4	0.4	0.1	0.1
VC	0.5	0.3	0.2	0

对某食堂饮食中五种营养素进行抽样检测，得

$$\underset{\sim}{A} = (0.2, 0.2, 0.3, 0.2, 0.1),$$

由

$$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{R} = (0.3, 0.3, 0.2, 0.2) 。$$

知该食堂的营养素比较充裕。

沙捷斯模型还可用来分类（Classication)。20 世纪 60 年代医学界常用各种量表，将许多种症状化为数量指标进行记分分析，从中得出病情严重的程度以及诊断结论．是一种从定量到定性的决策方法，可进一步采用沙捷斯模型使诊断趋于严密化科学化，为医疗诊断专家系统开辟新的渠道。

【例 6】 心功能的分级。

人的心功能可按心悸、气促、下肢浮肿、端坐呼吸等因素分为四级，其模糊关系可定为：

$\underset{\sim}{R}$ \ Y / X	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
X_1 心悸	0	0.1	0.2	0.7
X_2 气促	0.1	0.2	0.2	0.5
X_3 下肢浮肿	0	0.1	0.4	0.5
X_4 端坐呼吸	0	0.1	0.3	0.6

今有患者在 X 集上的评价设为

$$\underset{\sim}{A} = (0.3, 0.4, 0.2, 0.1),$$

由

$$\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{R} = (0.1, 0.2, 0.2, 0.4) 。$$

可判定此人心功能属于Ⅳ级。

沙捷斯模型还可用于优选（Optimization）。

【例7】　抗生素的优选。

通过药物过敏试验得到从细菌集 $B=\{b_1,\cdots,b_6\}$ 到药物集 $D=\{d_1,d_2,d_3\}$ 的模糊关系 $\underset{\sim}{R}$：

$\underset{\sim}{R}$ \ B \ D	d_1 青霉素	d_2 氯霉素	d_3 庆大霉素
b_1 肺炎链球菌	0.7	0.3	0.5
b_2 耐药金葡菌	0.1	0.1	0.7
b_3 链球菌	0.3	0.2	0.4
b_4 伤寒杆菌	0.1	0.8	0.2
b_5 绿脓杆菌	0.1	0.1	0.6
b_6 大肠杆菌	0.2	0.4	0.5

由微生物学可知下列疾病常见杆菌有如下关系：

A \ B	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
A_1 肺炎球菌性肺炎	0.8	0.1	0.7	0.05	0.1	0.2
A_2 伤寒	0.2	0.1	0.2	0.9	0.2	0.3
A_3 慢性化脓性骨髓炎	0.2	0.7	0.3	0.2	0.5	0.4

对于 A_1，A_2，A_3 应选 D 中哪种药物进行治疗，可通过模糊变换加以选择：

$$A_1\circ\underset{\sim}{R}=(\underline{0.7},\ 0.3,\ 0.5),$$

$$A_2\circ\underset{\sim}{R}=(0.2,\ \underline{0.8},\ 0.3),$$

$$A_3\circ\underset{\sim}{R}=(0.3,\ 0.4,\ \underline{0.7}),$$

知肺炎球菌性肺炎（A_1）宜选用青霉素（D_1），伤寒（A_2）宜选用氯霉素（D_2），化脓性骨髓炎（A_3）宜选用庆大霉素（D_3）。

6.7　中医辨证论治问题

中医对疾病的诊断和治疗原则是辨证论治，将模糊变换用于这个领域，可以增强和揭示中医诊断的科学性，且有助于探讨中医专家系统。

【例8】　1 胃脘痛“症—证—方”模型。

设胃脘痛症状集 S 到证型集 D 的模型关系为 $\underset{\sim}{R}$：

$\underset{\sim}{R}$ \ D / S	D_1 兼热	D_2 兼寒	D_3 气虚	D_4 气滞	D_5 瘀血	D_6 出血
S_1 热痛	0.6	0	0.1	0.1	0.1	0.1
S_2 冷痛	0	0.5	0.2	0.1	0.1	0.1
S_3 神疲	0.1	0.1	0.5	0	0.1	0.2
S_4 腹胀	0.1	0.1	0	0.5	0.2	0.1
S_5 瘀斑	0.1	0.1	0.2	0.2	0.4	0
S_6 黑便	0.1	0.1	0.3	0	0	0.5

证型集 D 到方剂集 G 的模糊关系，根据中医理论可定为 $\underset{\sim}{Q}$：

$\underset{\sim}{Q}$ \ G / D	G_1 蒲公英	G_2 高良姜	G_3 党参	G_4 枳实	G_5 桃仁	G_6 生蒲黄
D_1 兼热	0.5	0	0.2	0.1	0.1	0.1
D_2 兼寒	0	0.5	0.3	0.1	0.1	0
D_3 气虚	0	0.1	0.6	0.1	0.1	0.1
D_4 气滞	0.1	0	0	0.6	0.2	0.1
D_5 瘀血	0.1	0.1	0.1	0.3	0.4	0
D_6 出血	0.1	0	0.3	0.1	0	0.5

辨证施治病例：熊某，男 45 岁，胃脘部痛，间常泛酸呕吐，反复发作十余年，吞钡 X 线照片报告："慢性十二指肠冠部溃疡，小弯侧有假性憩室形成"，就诊时症见胃脘部灼痛，体瘦，神疲，胃脘部压痛明显，舌淡红，苔薄白微黄，脉弦细。

可定出病人症状子集 $\underset{\sim}{A}$ = (0.3, 0, 0.3, 0.2, 0.1, 0.1) 。

辨证：$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{R}$ = (0.3, 0.1, 0.3, 0.2, 0.2, 0.2)

$$\xlongequal{\text{归一化}} (0.23, 0.08, 0.23, 0.15, 0.15, 0.15)$$ 。

再辨证：$\underset{\sim}{C} \circ \underset{\sim}{Q}$ = (0.23, 0.1, 0.23, 0.15, 0.15, 0.15)

$$= \frac{0.23}{\text{蒲公英}} + \frac{0.1}{\text{高良姜}} + \frac{0.23}{\text{党参}} + \frac{0.15}{\text{枳实}} + \frac{0.15}{\text{桃仁}} + \frac{0.15}{\text{生蒲黄}}$$

诊断：胃脘痛—肝胃不和，气虚夹热型。治以疏肝和胃，益气清热，用肝胃百合汤加蒲公英党参治之。

【例 9】 脾胃虚辨证模型。

设 $\underset{\sim}{A}$ 是脾胃虚症状集 S 到证型集 D 的模糊关系，根据中医理论与临床经验可定如下表：

	$\underset{\sim}{A}$ \ S \ D	脾气虚	脾阳虚	脾为湿困	胃气虚
望诊	面色萎黄	0.6	0.1	0.1	0.2
	面色苍白	0.2	0.6	0.1	0.1
	浮肿	0.2	0.4	0.4	0
	舌质淡苔薄白	0.55	0.1	0.15	0.2
	舌淡胖苔白润	0.1	0.5	0	0.4
	苔白腻	0	0.2	0.6	0.2
闻诊	食欲不振	0.25	0.25	0.25	0.25
	呃逆或反胃	0.2	0.2	0	0.6
	脘腹胀闷或冷痛	0.15	0.4	0.1	0.35
	大便溏烂	0.3	0.4	0.2	0.1
	四肢无力	0.15	0.35	0.15	0.35
	头身困重	0.1	0.2	0.6	0.1
	畏寒	0.3	0.6	0	0.1
问诊	排泄物无特殊气味	0.25	0.25	0.25	0.25
切诊	脉濡软无力	0.6	0.1	0.2	0.1
	脉沉迟	0	0.55	0	0.45
	脉濡或滑	0.3	0.05	0.6	0.05

设 $\underset{\sim}{B}$ 是证型集 D 到治疗原则集 X 的模糊关系为：

$\underset{\sim}{B}$ \ D \ X	益气健脾	温扶脾阳	燥湿运脾	温胃益气
脾气虚	0.6	0.1	0.1	0.2
脾阳虚	0.25	0.55	0.1	0.1
脾为湿困	0.3	0.1	0.6	0
胃气虚	0.4	0	0	0.6

设 $\underset{\sim}{C}$ 是治疗原则集 X 到方剂集 Y 的模糊关系为：

C \ Y / X	黄芪异功汤	附子理中汤	香砂胃苓汤	黄芪建中汤
益气健脾	0.5	0.1	0.1	0.3
温扶脾阳	0.25	0.45	0	0.3
燥湿运脾	0.3	0	0.55	0.15
温胃益气	0.3	0.1	0.1	0.5

今有一病人其症候子集为

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} = (0.6,0,0.1,0.5,0,0,0.2,0.3,0.2,0.3,0.1,0,0.2,0.25,0.55,0,0.3)$$

则由模糊变换的框架

	S
病人	$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$

	D
S	$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$

	X
D	$\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$

	Y
X	$\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$

可知 $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} \circ \underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$　　$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} \circ \underset{\sim}{\boldsymbol{B}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}$　　$\underset{\sim}{\boldsymbol{G}} \circ \underset{\sim}{\boldsymbol{C}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{H}}$。

	D
病人	$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$

	X
病人	$\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}$

	Y
病人	$\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}$

于是

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} \circ \underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = (0.6,0.3,0.3,0.3)$$

$$= \frac{0.6}{\text{脾气虚}} + \frac{0.3}{\text{脾阳虚}} + \frac{0.3}{\text{脾为湿困}} + \frac{0.3}{\text{胃气虚}}$$

诊断:脾气虚

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} \circ \underset{\sim}{\boldsymbol{B}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{G}} = (0.6,0.3,0.3,0.3)$$

$$= \frac{0.6}{\text{益气健脾}} + \frac{0.3}{\text{温扶脾阳}} + \frac{0.3}{\text{燥湿健脾}} + \frac{0.3}{\text{温胃益气}}$$

治疗原则:益气健脾

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{G}} \circ \underset{\sim}{\boldsymbol{C}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{H}} = (0.5,0.3,0.3,0.3)$$

$$= \frac{0.5}{\text{黄芪异功汤}} + \frac{0.3}{\text{附子理中汤}} + \frac{0.3}{\text{香砂胃苓汤}} + \frac{0.3}{\text{黄芪建中汤}}$$

用方:黄芪异功汤。

该病人为脾气虚症,法当健脾益气,方用黄芪异功汤。

此外,综合评判(Synthetical evaluations)、聚类分析(Cluster analysis)、模式识别(Parttern recognition)对医学科研也有不可替代的作用。

综观上述,专家系统起了关键作用。它既是人工智能研究的重点,也是医学数学化中的难点。如何使之完善,起决定作用的是医学水平。我不懂医学,很难深入

下去，也就降低了研究水平，使我终身遗憾。当初卫生部陈部长要调我入京到部里作顾问，我没有主动争取，也算因素之一，但根本原因是年老体弱，失掉“假我十年卒以学易”的机会，劝君当惜少年时，夕阳虽好近黄昏！我不顾自已遗憾，将这个问题提出来，就是抛砖引玉。我的研究是砖，而医学数学化确实是玉。我殷切地希望医学界重视数学化，也希望我们数学界选择医学为载体，使数学有用武之地。“他山之石可以功玉”，医学数学化是当今世界潮流，盛世出贤才，有志气再建“医学王国”，祖国人民有厚望焉！

第三篇
数学的教学

"如果我所见的比笛卡尔远一点，那是因为我站在巨人们肩上的缘故。"

牛　顿

"教学法一旦触及学生的情绪和意志领域，触及学生的精神需要，这种教学法就能发挥高度有效的作用。"

赞可夫

1 绪 言

近年来出现的新技术革命，表面上是一场生产竞争与信息竞争，实质上是一场知识竞争与人的素质竞争。尊重知识、尊重人才、重视教育已成为时代的潮流，成为这场竞争胜利的关键。

目前我们在教学中存在素质教育不如人意，教书不甚得法，教学质量不高等问题，对于教师，必须教书育人、讲究教法。教育家赞科夫说："如果我们对教师要掌握教育学、心理学和教学法知识这一点估计不足，那是错误的。"据统计，目前有不少教师没有系统学习教育学、心理学和教学法，在教学中不能高屋建瓴，走了一些弯路。他们要求补学这方面的知识，以便有效地提高教学质量。

这篇是为适应这一需要而撰写的，以教育心理学、教学论、教学法为纲，以教书育人、讲究教法、加强素质教育为指导思想。为了立论的需要，选择了中外历代名家语录、教育史和有关思想品德的故事，以最小的篇幅，希望帮助教师解惑与提高教学水平。

1991年写成后适逢故人张仲陶教授从台湾来访。张教授曾是汉寿县县中的学生，将书稿带去台湾以书名《教学法概论》出版，为我八旬祝寿，情甚感人。1992年寄来2000册，中南工业大学、湖南医科大学、长沙大学、湖南教育学院、长沙交通学院等十所学校分发给教师阅读，反映还好，认为写得生动有趣，有理论有实例，对青年教师帮助很大。特别是以心理学指导教学论，以教学论指导教学法，加强了教学法的理论基础，更切合学生的心声。还常有单位来函索书。时过十余年，又再修订一次，概述教育心理学、教学论、教学法、素质教育、基本能力培养、教学改革、教师等内容。教学法既是科学，也是艺术，既可与人以规矩，又可与人以技巧，但运用之妙，存乎一心。虽尽力而为，仍不理想，不当之处，尚希读者指正，以匡不密。

教学法是在教育学与心理学的理论基础上研究教与学的规律的一门科学，它的目的是为了提高教学质量和教学效率。教育家徐特立（1877～1968）说："一个懂得教育学、心理学、教学法的教师，教起书来总要比较好些。用恩格斯的话，免得走无穷无尽的弯路，并节省在错误方向下浪费掉无法计算的时间和劳动，使工作达到最佳的效果。"显然，作为教师，学习教学法是必不可少的。

教学法研究的对象包括教学过程、学习过程、教学内容、教学原则、教学方法、学习方法、教学组织形式等，它们同时也是教学论研究的范围，只是后者更广泛一些。目前在教学理论上，已广泛开展了心理学的研究，使教学论越过了经

验的叙述和概括，向着同心理相联系的边缘科学迈进，出现了教育心理学分支。

研究教学法要利用教学论，而教学论又必须利用心理学，我们希望用最小的篇幅最少的时间来讨论教学法，因此为了论述的方便，与避免重复，本书第一章概述教育心理学，侧重学习过程；第二章概述教学论，侧重教学过程；第三章概述教学法，侧重课堂教学与思想品德教育，希望帮助教师对教书育人研究教学法有所启发。

作者教中学 15 年，大学 40 多年，主要是教数学，也教过数学教学法和教育学。理论与历史都是自学的，经验有一点，教训更多。希望我们的教师，站在巨人的肩上，少走弯路，“莫桑榆晓，微霞尚满天”，有厚望焉！

2 教育心理学概述

“为什么教师要研究心理学教育史教学法一类的科目呢？有两个理由：一、有了这类知识，他能够观察和解释儿童心智的反应，否则便易于忽略。二、懂得了别人用过有效的方法，他能够给予儿童以正当的指导。”

——杜　威（1859～1952）

教育心理学是研究人的心理现象，揭示人的心理活动规律的科学。人的心理活动包括两个方面：一是人在认识事物时所产生的心理活动，如感觉、知觉、表现、思维、想像、记忆、注意等；二是对待事物所表现的心理活动，如兴趣、情感、意志等。教育心理学是心理学体系中与教育工作关系最密切的一个分支，它研究教育过程中三种主要的心理活动规律：

（1）掌握知识与技能；

（2）发展智力与思维；

（3）形成个性与道德品质（世界观）。

可见教师学习教育心理学的意义在于：

（1）了解学生心理规律有助于因材施教；

（2）了解掌握知识、发展思维的心理规律，有助于提高教育质量与教师的业务水平；

（3）教学相长，有助于自我教育，形成优秀的心理品质。

2.1　教育心理学的进展

2.1.1　我国古代的教育心理学思想

我国古代虽没有心理学的专著，但散见于其他著作中的心理学思想是为期甚早，且内容丰富的。还提出了“解蔽”、“非相”、“性善”、“性恶”等类似品性测验的“观人之法”等。

《诗经》在“巧言”中提出“他人有心，予忖度之”。用忖度来研究他人的心理活动，大大早于西方各国。

孔子（B.C.551～B.C.479）说：“性相近也，习相远也。”“视其所以，观其

所由，察其所安，人焉瘦哉！人焉瘦哉！”《礼记》：“考之以观其信；挚之以观其勇；烦之以观其治；淹之以利以观其不贪；滥之以乐以观其不宁；喜之以物以观其不轻；怒之以观其重；醉之以观其不失；纵之以观其常；远使之以观其不贰；迩之以观其不倦；探取其志以观其情；考其阴阳以观其诚；覆其微言以观其信；曲省其行以观其备戒。”这些论述说明我国古代的“观人之法”，都属于心理学的研究。

秦吕不韦还提出对人的“八观六验”，不仅要观，还应该验。《吕氏春秋》“论人”中载：“凡论人，通则观其所礼，贵则观其所进，富则观其所养，听则观其所行，止则观其所好，习则观其所言，穷则观其所不受，贱则观其所不为。喜之以验其守，乐之以验其僻，怒之以验其节，惟之以验其特，哀之以验其人，苦之以验其志。”

2.1.2 欧洲早期的教育心理学思想

欧洲早期的哲学家也研究心理问题。德谟克利特（B.C.460～B.C.370）主张身心发展要一致，要注意心智教育。“身体美若不同聪明才智相结合，就是某种动物性的东西。”“人应该多发展理解，而不是多积累知识。”

苏格拉底（B.C.469～B.C.399）主张心理学要以研究人自己为出发点，认识人自身乃是智慧的主要因素。

苏格拉底的大弟子柏拉图（B.C.427～B.C.347）是一个唯心主义者。他提出两个唯心主义的概念：灵魂和理念。他杜撰说：“神要创造世界时，便把理念放在灵魂里边去，把灵魂放到身体里边去。”他的学生亚里士多德（B.C.384～B.C.322）反对理念论。认为只有物质才是永恒存在的，物质不能被创造，构成具体事物的有四因——质料因、形式因、动力因和目的因。以“四因说”为基础，他认为人的肉体和灵魂的关系就像质料和形式一样，进而强调了教育学与心理学必须紧密联系。他把教育分成三个方面：智育、德育和体育。又把灵魂分为三类：植物灵魂（表现在营养繁殖上）、动物灵魂（表现在感觉和愿望上，又称意志灵魂）、理性灵魂（表现在思维或认识上）。他认为三方面的教育要和三类灵魂相顺应：体育要顺应植物灵魂，德育要顺应动物灵魂（意志灵魂），智育要顺应理性灵魂。身体、德行和智慧要和谐发展。

这些学者对教育心理学作了启蒙性探讨，也写有专门的著作，到中世纪文艺复兴以后，教育心理学才逐渐繁荣发展。

2.1.3 教育心理学的发展

从17世纪起，欧洲一些哲学家和教育学家写出了有关教育心理学的著作。如乌申斯基（1824～1870）：《人是教育的对象》；鲍德温：《心理学的初步与教

育》(1887)、《在教育上的应用心理学》(1892);詹姆斯(1842~1910):《心理学原理》(1890)、《向教师们谈谈心理学》(1899);哈里斯(1835~1909):《教育心理学基础》(1898)等。教育心理学作为一门独立的科学,是由桑戴克(Thorndike,1874~1949)建立的。

桑戴克于1903年写了《教育心理学》。1911~1913年把该书扩为三大卷:第一卷为《人的本性》,从人的个体本性和儿童的发展这方面来阐述教育心理的规律;第二卷为《学习心理学》,论述在学习与教学过程中,儿童本性如何发展变化的理论;第三卷为《工作与疲劳及个性差别》,主要论述个别差异问题。1914年桑戴克又将三大卷合成为《教育心理学概论》,它标志着一门独立的心理学分支的建立。

在美国,自桑戴克以后,学派繁多,20世纪30年代盛行心理与教育测验,40年代对实际应用更为关心,出现了联结主义与格式塔心理学,托尔曼(1886~1959)的"目的性学习",斯金纳(Skinner,1904~)的操作性条件反射与程序教学,并兴起了认知学派。布鲁纳(Bruner,1915~),皮亚杰(Piajet,1896~1980)、奥苏伯尔(Ausubel)等的理论普遍受到重视。

在俄国,卡普杰列夫(1849~1922)从教育实际出发,将教育与心理结合,写出了《教育心理学》(1833)。十月革命后,对巴甫洛夫(1849~1936)经典性条件反射理论和高级神经活动学说十分重视。20世纪60年代起,以加强科技人才的培养为重点,对教育进行了改革,加强了对学习心理与发展智能的研究,出现了不同的学派,如重视联想和反射理论的梅钦斯卡娅(1905~)、波戈亚夫林斯基(1898~1981)和强调活动与操作的列昂节夫(1903~1979)、塔莉金娜(1923~)、赞科夫(1901~1977)等。

在我国,1917年陈大齐在北京大学建立中国第一所心理实验室。1918年他发表了《心理学大纲》。这是我国第一部心理学专著。以后我国学者自编教育心理学教材的有廖世承(1924)、潘菽(1935)、陈选善(1938)、陆志韦(1926)、华超(1924)等。但1958年一度错误地给心理学扣上"伪学科"的帽子,使这门学科的发展受到一些影响。1963年10月教育部在《关于中央教育科学研究所的基本情况和今后方针任务的请示报告》中,把研究教学法和教育心理学列为主要任务之一。1980年潘菽主编的《教育心理学》修订出版。张德秀《教育心理学研究》、邵瑞珍《教育心理学——学与教的原理》也相继问世,出现了方兴未艾的局面。

2.1.4 动向与展望

教育心理学是教育学与心理学相结合的产物,它是研究人在教学、教育过程中的心理活动及其规律的科学。它从桑戴克到现在也不过七十多年,还属于"发

展中学科”，在体系上还没有最后定型。今后的发展动向，可大致概括如下：

（1）各派心理学相互对立的局面已趋缓和，在联结与认知两大学派之间，也出现了取长补短的迹象。

（2）学科间兼容并包、相互联系正在加强。心理学、教育学、生理学、伦理学、社会学、哲学等的联系正在加强，教育心理与社会心理、发展心理、学科心理、管理心理等处于相互渗透、互相吸收的过程之中。

（3）重视研究学生的心理活动，研究学生的学习心理。

（4）重视研究人的内心世界，研究人际关系，特别是重视研究师生关系、学生之间的关系、子女与家长的关系以及这些关系对学习的影响。

（5）注意引入现代科学技术，如引用现代化教学手段；把信息论、遗传工程、智能测验等引进到教育心理学中来。

2.2　人的心理与条件反射理论

2.2.1　人的心理是大脑的机能，是客观现实的反映

唯心主义者认为没有心理意识，世界都不存在，把心理意识说成是不依赖于物质而存在的东西，是第一性的，而把物质看成是心理意识所派生的，是第二性的。

唯物主义者与此相反，认为物质是世界的本源，是第一性的，心理意识是由物质产生的，是第二性的。机械唯物主义者把心理看成大脑分泌物，也看成是物质，把人脑与机器等同起来，抹煞了人的主观能动性。辩证唯物主义者则认为人的心理是大脑的机能，是外部世界的反映，心理不是物质，脑是心理的器官。纠正了过去心是心理器官的错误论断。

当一个刺激作用于人的感觉器官时，所产生的神经运动沿着感觉神经传到中枢，经中枢神经的整合，再从中枢通过运动神经将新的神经行动传给效应器官，发生反应，这就是有机体实现反射的解剖基础。

当客观事物作用于人的感觉器官时，人就以感觉、知觉、思维等形式反映在人脑之中，于是形成人的心理。客观现实是心理的内容和源泉。离开了客观世界，即使具备了人脑，也不会产生人的心理，印度的“狼孩”就是证明。1920年印度人辛格发现由狼带大的女孩，由于从小离开了人的生活环境和狼生活在一起，因而没有形成人的心理，用四肢行走。辛格用两年时间才使她学会站立，六年才会行走，快走时还要四肢爬行，四年只学6个单词，七年学了45个词，到17岁临死前，其心理只有四岁儿童水平。

人的心理是在实践中发展起来的，实践活动是人的心理发展的基础。由于人的先知素质不同，后天经历不同，因而形成的主观世界也不相同。所以心理是客观现象的主观映象。

2.2.2 **条件反射**

苏联生理学家巴甫洛夫提出条件反射理论，美国斯金纳（1904～）提出操作条件反射，他们构成刺激——反应联结理论。

神经活动的基本方式是反射。如食物作用于口腔粘膜就要流唾液，就是一种反射。

反射分无条件反射与条件反射两种。

无条件反射是与生俱来的，如手被火烧就立刻缩回来，实现无条件反射的生理机制是低级神经中枢。其神经通路是生来就联系好了的。

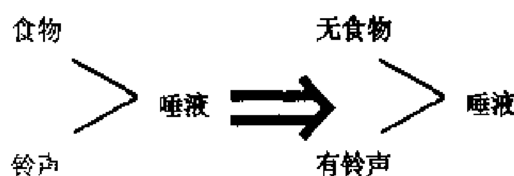
条件反射是在一定条件下所形成的新的反射，实现条件反射的机制是高级神经中枢，是大脑皮层上暂时神经联系的接通，其基本条件是条件刺激物与无条件刺激物在时间上的重合。

巴甫洛夫首次做条件反射实验，给狗喂食物的同时，给以铃声刺激（条件刺激物），这时在狗的大脑皮层上引起两个兴奋点，铃声刺激与食物刺激经过几次结合以后，就会使这两个兴奋点形成暂时神经联系接通，再单独出现铃声时，也会使狗流唾液，这说明铃声已不是中性刺激物了，而成为食物的信号，成为条件刺激物，形成了条件反射。现用图1来说明：

①铃声——耳——延脑——丘脑——听觉中枢

②食物——舌——延脑——丘脑——味觉中枢——丘脑——延脑——唾液腺——唾液

①……②暂时联系接通（①②在时间上的重合使听觉中枢与味觉中枢暂时联系接通）



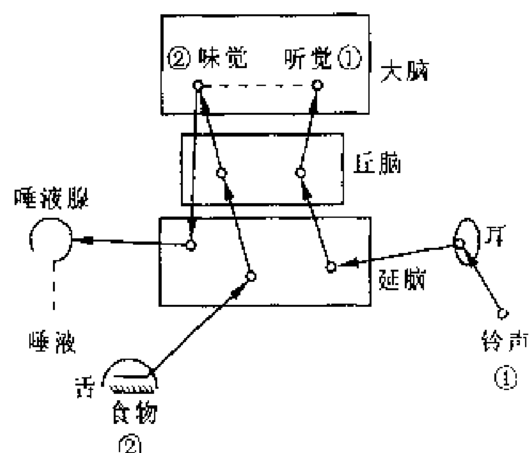


图 1

暂时神经的主要部位是大脑皮层，同时也有皮下一系列神经结构的参与。

在现实生活中人和动物并不是消极地接受刺激后才发生反应的，而是积极地进行活动。美国心理学家斯金纳创立操作条件反射理论，他把一双饿鼠放进一个带有标杆的实验箱里，鼠偶然踩上标杆，就有食物滚到食物槽内，使鼠得到食物。经过多次反复，鼠就建立了踩杠杆获得食物这一条件反射。他为了与经典性条件反射相区别，把它称为操作条件反射。

经典性条件反射强调先有强化（食物铃声）然后才有反应；操作性条件反射强调先有反应（操作工具）然后才给予强化（获得食物）。

在生活中操作性条件反射多于经典性条件反射。例如学生的学习，只有当他积极主动地努力学习，才能获得好成绩受到好评，而优异的成绩和好评，正是对积极学习的强化。

2.2.3 条件反射的抑制

当条件刺激物所代表的信号意义改变或消失时，就不再引起原有条件反射的活动，称为条件反射的抑制。这种抑制分无条件抑制与条件抑制两种。

无条件抑制又分外抑制与超限抑制。外抑制是生来就有的，是由于额外刺激物的作用而使原有条件反射活动停止的抑制。例如上课时突然从外面走进一个人来，从而抑制当时的学习活动。超限抑制又称保护性抑制，是由于刺激物信号过强或作用时间过久而引起的抑制。例如长时间集中精力学习会逐渐降低学习效果，甚至转入睡眠状态，是由于刺激超过大脑神经的负荷而产生的保护性抑制。

条件抑制是后天在一定条件下形成的抑制，又分消退抑制与分化抑制。消退抑制是由于长期单独应用条件刺激而不以无条件刺激物强化所产生的抑制。如狗形成铃声食物性条件反射后，只给铃声不给食物，逐渐使铃声不起条件反射作用。又如学习后长期不进行复习就产生遗忘。分化抑制是指在条件反射分化过程中所发生的抑制，要想精确地掌握知识都必须有分化抑制参加。

2.2.4 两种信号系统

从条件反射的形式，可见条件刺激物可以成为无条件刺激物的信号。由信号所引起的条件反射系统称为信号系统。

人的信号系统分为第一信号系统和第二信号系统。

第一信号系统——凡是各种具体刺激物直接作用于有机体而起信号作用时，这种刺激物称为第一信号系统。如声音（铃声）、灯光等。

第二信号系统——“望梅止渴”、“谈虎色变”这类词和语言也可以代表具体事物而起信号作用，成了信号的信号，把词和语言称为第二信号，由词和语言引起的条件反射系统为第二信号系统。

一个词的形状可以引起视觉，一种声音可以引起听觉，词的信号作用主要是它的含义，含义具有抽象性和概括性，词是概括化的信号。但是一个不懂外语的人，即使看到或听到这个外文的词也不能起信号作用，因为他不懂得它的含义。

第二信号系统是在第一信号系统的基础上建立起来的，离开第一信号系统就失去意义。因此教学中要注意从实际出发，理论联系实际，防止玩弄词句或死记硬背。

2.3 心理现象的分析

人的心理现象，包括人在认识事物时所产生的心理活动（感觉、知觉、表象、思维、想像、记忆、注意）与对待事物所表现的心理活动（兴趣、情感、意志）。前者是认识过程，后者是情感和意志过程，它们最终形成人的个性。

2.3.1 认识过程

客观事物作用于人的感觉器官时，引起人对客观事物的认识。认识过程包括感知、表象、思维、想像、记忆、注意等。

(1) 感觉和知觉

感觉是事物的个别属性作用于人的感觉器官的反映，如形状、大小、颜色、声音等；知觉是事物的整体属性的反映，如桌子、铃、黑猫等。这两者又是密不可分的，通常感觉和知觉合称为感知，是认识事物的最初环节，属感性认识阶段。

(2) 表象

表象是在感知基础上头脑中重现被感知事物的记忆表象，它的特征是直观性和事物表面特征的概括性。表象是感性认识的高级形式，是从感知到思维的过渡环节。

(3) 思维

有些事物的本质属性和规律不能直接感知，只能在感知的基础上借助于比较、概括、推理去间接地、概括地反映，这种反映就是思维。

人的思维过程表现为分析、综合、比较、抽象和概括。

分析与综合是相反的过程，但又密不可分。分析是在综合指导下的分析，综合是在分析基础上的综合，是思维的基本过程。

人对事物的认识是通过与其相同或相异的事物的比较来实现的。没有比较就不能对事物有精确的认识。

通过分析、综合和比较，就能区分出事物的本质属性，在此基础上就可以进一步抽象、概括。

概念是事物本质属性在人脑中的反映。某些概念形成以后又可以利用概念进行判断和推理，思维就是客观事物在人脑中获得事物的本质和规律，是认识的理性阶段。

(4) 想象

想象是在现实刺激物的影响下在头脑中对记忆表象进行加工改造，从而形成新象的过程，也是客观现实的反映。

根据想象的创造程度，可以把想象分为再造想象、创造想象、幻想（理想与空想）。

(5) 识记（或记忆）

识记是经历过的事物在人脑中的反映。没有识记便没有知识，也就没有思维。

识记分意义识记、机械识记（强记）与结构识记等，3.5 中还要详加讨论。

意义识记是有识记目标的识记，这种识记由于其意义的存在而能获得保持。例如记一个单词“handkerchief”（手帕），有人把它的音拟为“汉口起火”而终身不忘。

机械识记也称强记，如记住学号、邮政编码、外语单词、九九表等，在生活中有一定的作用，特别是要趁年轻时记忆力强，强记一些重要的东西是很有必要的。

结构识记是将识记的内容按照一定的意义加以组合，形成一种结构，使识记得以常久保持。

美国心理学家布鲁纳（Bruner，1915～）做过一个实验，以 30 对配对的词让 12 岁儿童做实验，其结果如下：

甲组	只要求记住 30 对词	记住 50%
乙组	利用中介词使配对词联系起来记，并由教师讲	记住 95%
丙组	利用中介词使配对词联系起来记，让学生自己做	记住 96%

布鲁纳得出的结论是：当新知与旧知形成了联系，获得了前后理解贯通之后，结构识记就可以整个地被记住。而且易于保持和重视。

(6) 注意

注意是心理活动对某种事物的指向（对方向而言）和集中（对程度而言），可见注意不是心理过程，它不揭示刺激物的意义，而是各种心理过程所离不开的一种心理特性。

注意分不随意注意与随意注意两种：不随意注意是指事先没有预定目的，也不需要意志努力的注意。随意注意是指有预定的目的，必要时需要意志努力的注意。例如到某宾馆访友，上电梯时只注意到 10 楼，是随意注意；而不知道这个

宾馆有几层楼，是不随意注意。

2.3.2 情感和意志过程

情感是人对事物是否符合人的需要而产生的体验，它不同于认识过程，但是一种反映过程，是通过爱与恨、愉快与痛苦、满意与不满意以及恐惧、愤怒、羞愧等体验来反映的。

积极的情感是推动人进行活动的动力，消极的情感则起相反的作用。列宁说："没有人的感情，就从来没有也不可能有人对于真理的追求。"情感是人的主观能动性的源泉之一。

人不仅对事物产生情感，而且确定目的，支配行动，改造现实，克服困难，力求实现预定的目的，这一心理过程称为意志。我国历来重视立志，倡导有志者事竟成，墨翟（B.C.468~376）说："志不强者智不远"。朱熹（1130~1200）主张"为学须先立志"。意志包含两个特征：一是有目的的心理活动，二是克服困难的毅力。因此意志也是人的主观能动性的源泉之一。

2.3.3 个性

人的个性是在先天素质与认识的基础上通过人与环境的相互作用，对现实产生一定的情感与意志，个性是在这一系列的心理过程中形成的。

由于每个人的先天素质与后天经历不同，所形成的个性也不同。个性的心理特征包括兴趣、能力、气质和性格。

兴趣是探究某种事物时所产生的一种认识倾向。孔子说："知之者不如好之者，好之者不如乐之者。"兴趣、认识与个性间的关系可以认为"认识→兴趣→乐趣→志趣（意志）→个性"。

能力是知识、思维的最终体现，它直接影响活动的效率。能力包括观察力、思维力、想像力、记忆力、注意力（这五力总称为智力）、操作能力、独立工作能力、组织管理能力和特长等。

气质是一个人表现在心理活动和行为动作发生的速度与强度的心理特征，是高级神经活动类型在动作速度、情绪强度和性格倾向等方面所表现出来的特点。

巴甫洛夫说："人的高级神经活动过程中有三种基本特性：（1）兴奋和抑制过程的强度；（2）兴奋和抑制过程的平衡性；（3）兴奋和抑制过程的灵活性，即彼此迅速交替的能力。"他根据神经活动过程这三种特性的不同结合，把高级神经活动划分为兴奋型（胆汁质）、活泼型（多血质）、安静型（粘液质）和弱型（抑郁质）四种。由此心理学把气质也分为四类：

（1）胆汁质：直率，热情，精力旺盛，情绪容易激动，心境变化剧烈，具有外倾性。

(2) 多血质：活泼，好动，敏感，反应迅速，喜欢与人交往，注意力容易转移，兴趣容易变换，具有外倾性。

(3) 粘液质：安静，稳重，反应缓慢，沉默寡言，情绪不易外露，注意稳定且难于转移，善于忍耐，具有内倾性。

(4) 抑郁质：情绪体验深刻，孤僻，行动迟缓，且不强烈，善于觉察他人不易觉察的细节，具有内倾性。

依照巴甫洛夫第一第二信号之间的相互关系，有人把人类高级神经活动区分为三种类型（也称三种气质）：

(1) 艺术型：第一信号系统占相对优势；

(2) 思维型：第二信号系统占相对优势；

(3) 中间型：一二信号系统相对平衡。

性格是一个人表现在对现实的态度与行为方面的心理特性。性格有三种划分：机能类型说把人的性格分为理智型、情绪型和意志型三类；向性说分为内倾型和外倾型两类；独立顺从说则分为顺从型与独立型。

教师可以根据对学生的了解，把他们的气质和性格进行分类，以便给予不同的教育。

2.4 学习过程的理论

人类学习的本质在于增进知识，发展思维，提高能力，认识世界，改造世界。如何促进学习的发展呢？我国古代有些重要的论述：

孔子主张："知之者不如好之者，好之者不如乐之者。""敏而好学，不耻下问。"子绝四："毋意，毋必，毋固，毋我。"

孔伋（孔子孙，子思，B.C.483～402）提出："人一能之，已百之，人十能之，已千之。果能此道矣，虽愚必明，虽柔必强。"（《中庸·哀公问政》）

墨子认为："志不强者智不远，言不信者行不果。"东汉徐干（171～218）在《中论治学》中称："志者，学之师也；才者，学之徒也。学者不患才之不赡，而患志之不立，是以为之者 億兆，而成之者无几，故君子必立其志。"于是形成古训"有志者事竟成"。

19世纪以来，学习过程的理论，可概括为两大派别：刺激－反应联结理论，和认知理论。前者为外因论，后者为内因论。

2.4.1 刺激－反应联结理论

美国心理学家桑戴克从事动物学的实验研究，他设计一个笼子，里面装有门钮，把一双只饿猫放在笼子里，笼外放有食物。猫在笼内盲目走动，偶然碰到了

门钮，笼门打开了，猫取得了食物。再把猫放回笼内，继续实验，随着试验次数的增加，猫的无效动作越来越少，最后直到把猫放进笼内就立刻转动门钮，打开笼门。猫尝试开笼的时间会越来越少，可以绘成一条曲线，下面就是桑戴克所得出的猫开笼的学习曲线（图2）。

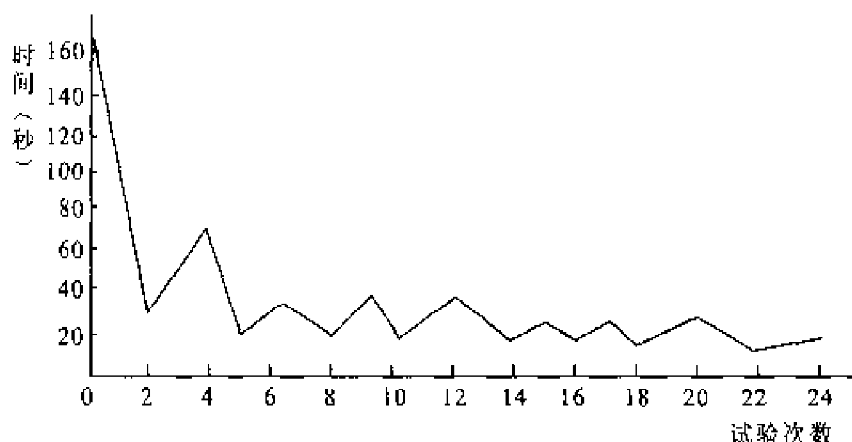


图 2

桑戴克认为，猫开笼的过程，就是经过多次尝试，不断减少无效劳动，不断舍弃错误动作而学会的。这时猫已完成了打开笼门取食的学习。桑戴克认为猫已把笼内情境与转动门钮开门取食之间建立了巩固的联结。他称之为联结主义的学习理论，或刺激—反应联结理论，又称尝试错误说。

桑戴克是从生物学的机械的观点来研究学习的，他不重视领会、理解等心理过程在学习中的作用，而把学习单纯解释为情境与反应的联结。但是他的联结说是教育心理学史上第一个较为完整的学习理论。后来赫雨（1884～1952）、斯金纳（1904～?）等人继续研究，提出了一些重要的原理，如动机理论、强化理论，对这门学科的发展起了重要的作用。

2.4.2 认知论的学习理论

认知论者不同意联结理论，认为学习是内部认知结构的变化。认知就是指理解，认知结构即认识上的内部系统。早期代表人物是德国心理学家苛勒（KOhler，1887－1967）。

苛勒用了七年时间研究黑猩猩的学习，他把猩猩放在笼子里，笼外放置用手取不到的香蕉，笼内放一根手杖，用它可以取到香蕉。猩猩静静地观察，突然拾起手杖取到香蕉。苛勒认为猩猩学会用手杖取到香蕉并不是通过尝试错误而达到刺激与反应的联结，而是突然领悟，即形成了手段、目标及其关系的认知，因而这一学习理论为“顿悟说”。

美国认知心理学家布鲁纳认为学习某一知识，就在头脑中形成这一知识的认知结构，它与新的感觉输入相互作用，就会形成人的感知与概念。他认为学习乃是通过主观发现而形成认知结构的过程，他去掉了早期认知派的神秘色彩。

认知理论强调学习的内因，认为行为受意识支配，强调学习中的理解作用和主动性。

由于学习是一个复杂的过程，既有尝试错误，也有顿悟；既有动作习惯的形成，也有认知结构的发展；既有外因，也有内因，应以内因为主。目前两派的争论基本平息，认知理论成为国外学习理论的共同趋势。

举一个例子来说明两派观点的统一，比如奖励对学生学习有促进作用，这是公认的。联结派用“强化论”解释，强调外因；认知派用“信息反馈说”解释，强调内因。二者都言之成理不可偏废。

2.4.3 学习方式的类型

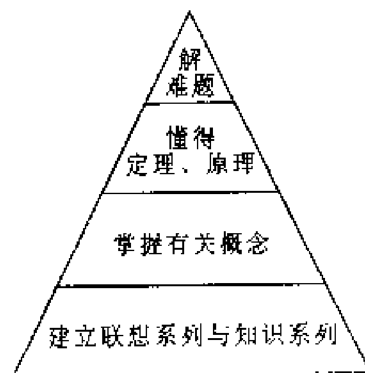
近年来许多心理学家主张把学习现象进行分类：

布卢姆主张把教育目标分为三类：①认知的；②情感的；③精神运动。

加湟根据学习是由简到繁由低到高，主张分为：①信号学习；②刺激反应学习；③连锁学习；④语言的联合；⑤多样辨别学习；⑥概念学习；⑦原理学习；⑧解决问题学习。

加湟是美国当代研究学习理论的心理学家。20 世纪 60 年代前，他受联结主义影响，后来成了认知主义的代表人物。有人把他的学习理论称为“联结—认知”理论。

加湟认为新知识和旧知识之间要联系得好，两者之间的差距要适当，要从学生在学习时的认知发展水平出发，才能收到良好的学习效果。他认为知识本身是有体系的，这种体系在结构上好像一个金字塔（如下图），一级一级上去。他以解难题为例，要先懂得解题的定理、原理、公式；要懂得定理、原理，就要掌握有关概念，还必须具有系列化了的有关知识，这样逐级循序上去，才能解出难题。因此知识是有体系的，所以必须加强对教师的指导。他的学习理论又称为“认知—指导”说。



奥苏伯尔（Ausuber）根据学习的进行方式分为：①接受学习；②发现学习。根据学习内容的性质分为：①机械学习；②有意义学习。接受学习不一定就是机械的，有意义地接受学习不是被动的，它是获得知识的主要途征。

布鲁纳认为发现学习有四大优点：①有利于激发智慧的潜力；②有利于培养内在动机；③有利于学会发现的技巧；④有利于记忆的保持。发现学习也有局限性，应与接受学习相结合，内容不同可采取不同的方式。

§3 中关于发生式的教学基本上是采取布鲁纳关于发生学习的观点。

根据以上论述，学习过程可以认为是在教师的指导下培养学习动机、掌握学习方法、提高学习兴趣与自觉性、增强智力才能、养成良好性格品质的过程。

2.5 学习动机

2.5.1 学习动机的心理基础

动机是激励人们去行动以达到一定目的的内在原因，是推动人们行动的内部动力。学习动机是由学习的需要引起的。

在学习过程中需要各种心理活动处于积极活跃的状态，才能获得良好的学习效果。所谓积极的心理活动是指：敏锐的感知，灵活的思维，丰富的想像，牢固的记忆，热烈的情绪，坚韧的意志，稳定而集中的注意。

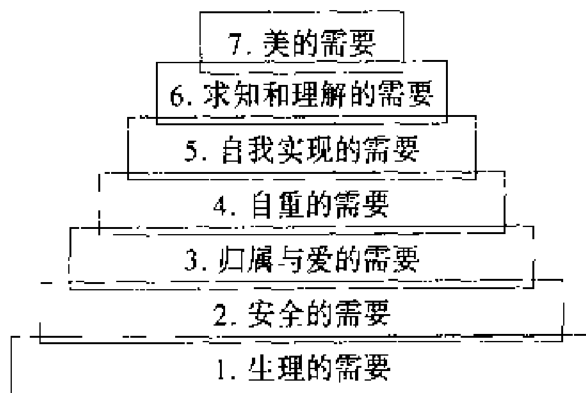
有一种说法，形容这些心理因素（感知思维等）像物理量一样有 S 极与 N 极，它们都按秩序排列成“S－N－S－N”，彼此互相吸引而不互相排斥，就构成积极活跃的状态。

心理学认为学习动机是对学习起推动作用的心理因素，必须在学生的意识上创造学习的诱因，这些诱因是：学习的需要，认识事物的乐趣，学习的自觉性。

1. 学习的需要

它是达到一种学习目的的激发因素。如有的学生感到外敌入侵，为还我河山，救国图存而发奋读书；有的感到国家落后，为自立于世界之林，要改变祖国的面貌而学习；有的为报答父母之恩而学习；有的感到家境困难，为摆脱贫困而读书；有的为个人的荣耀升官发财而读书，不一而足，这些都足以激发一个人的学习动机。

心理学家马斯洛（Maslow，1908～1970）对学习动机提出需要层次说，他认为：当低级的需要因有报偿而得到满足时，新颖的高级需要就有涌现的趋向。他把人类的需要分成了若干个层次：



人的各种需要，马斯洛认为是按照这样的层次来排列的，也要按照这样的层

次由下到上逐层来满足。一个层次满足以后，才能进入上一个层次。

（1）生理的需要，如吃饭、穿衣、喝水、空气、日光和性的需要等。

（2）安全的需要，如人身安全、避免危险和得到保护等。

（3）归属与爱的需要，如集体的温暖、同伴的友爱、亲属的爱抚等。

（4）自重的需要，即自尊的需要。如受人尊重，得到信任等。

（5）自我实现的需要，就是能够实现自己的抱负（理想、志向），能够取得预期的成就（有志者事竟成）。

（6）求知与理解的需要，盼望满足“精神食粮”的需要，这属于较高的精神境界。

（7）美的需要，是最高的一个层次。

马斯洛的需要层次说，应用到学校工作上，对照相应的层次可注意以下几点：

（1）注意校舍的建筑，教室的采光与通风，饮水的供应，伙食的改善，上课不要“拖堂”等。

（2）注意危房及有毒和易燃易爆化学药品的管理，传染病的预防，体育运动中的安全保障工作。注意环境卫生，严禁体罚与变相体罚等。

（3）建立亲密的师生关系，树立尊敬教师、爱护学生的风尚，建立团结友爱的班级集体等。

（4）教师对学生要循循善诱，和颜悦色，不能讽刺呵斥而刺伤学生心灵，注意学生个性特征。

（5）教师要帮助学生树立远大理想与志向。

（6）教师要启发诱导学生求知的需要。

（7）教师要让学生感受到知识的美和精神的美，努力去美化自己的心灵。

2. 认识事物的乐趣

由渴望而得到满足，一定产生乐趣，由不知到知，由不能到能，这种探索性思维一旦得到满足，必然产生乐趣。孔子说：“学而时习之，不亦悦乎！”学习也能产生乐趣，这种乐趣的引诱，足以激发学习动机。

3. 学习的自觉性

几种动机共同起作用，可使学习产生自觉性，这种自觉性，决定一个学生的学习态度，专心听讲，勤于阅读，认真完成作业，并有克服困难的毅力。孟子说：“学问之道无他，求其放心而已。”要求放心，贵在自觉，有了自觉性，学习才能收到良好的效果。

2.5.2 学习动机的培养与激发

1. 通过学习目的教育、爱国主义教育，培养正义感，启发学习自觉性

人们观看电影电视的格斗场面，看到好人与坏人拼搏，自然产生一种正义感，从内心里帮助好人斗坏人，胜了就兴高彩烈，败了就惋惜愤恨。中华民族就是这种正义感的化身，我们的民族精神就体现在爱国主义上。苏霍姆林斯基说："热爱祖国这是一种最纯洁、最敏锐、最高尚、最强烈、最温柔、最无情、最温存、最严酷的感情，一个真正热爱祖国的人在各个方面都是一个真正的人。"南宋的岳飞与秦桧，人们历来都是爱憎分明的，历史最能教育人民，爱国主义诗篇最能激发民族感情，这些取之不尽的史料最能诱发学习的自觉性，奋发图强。

2. 培养学生对学习的兴趣

学生学习成绩不好的最大原因就是对学习不感兴趣。瑞士教育家皮亚傑（1896～1980）说："所有智力方面的工作都要依赖于兴趣"。苏霍姆林斯基也说："成功的欢乐是一种巨大的情绪力量，它可以促进儿童好好学习的愿望，缺乏这种力量，教育上的任何巧妙措施，都是无济于事的。"

如何培养学生这方面的兴趣，是每一个教师的根本任务，这里只提出某些注意事项。

（1）新奇是引起兴趣的一个因素，注意教学内容、教学方法的新颖性，以引起学生新的探究活动。

（2）创设问题的情境，诱发积极思维。心理学认为思维是从问题开始的。一个平静的课堂要使之活跃起来的惟一办法是提出适当而有趣的问题。

（3）利用学习成果的反馈作用激发学习动机。

我有一个亲身的体验，读初中一年级时学校有个布告栏，贴的是学生的优秀作业，经常看到几个同学的作文诗歌传观，我很羡慕，心想哪一天我也能够"上墙"。一次我写了一道咏雪的诗：

"出门无所见，白雪满平庑，树静宛林皎，寒山听鸟呼。"

诗很平淡，老师却给了很高的评价，第一句批"雄浑句"，第二句批"渐人佳境"，第四句批"小子可以言诗"，并把它在布告栏上传观。我很兴奋，在这以前不想读书，总是想家好玩，这次调动了自觉性，感到读书有味，于是发奋读书至于废寝忘食，再不要家长老师管了。可见学习成绩的反馈作用，足以激发学习积极性，甚至关系到一个孩子的成长。

（4）严格要求，正确评价。创设好的学习环境。

教师对学生要严格要求，对学生的行为与成绩要正确评价。多表扬鼓励，指导学习方法，可以提高学习兴趣。要创设一个好的学习环境，一个好的班集体。没有一个好的舆论、好的学风，欲求学生有好的求知欲望，是缘木求鱼不可得也。

家庭环境也很重要，如果家长不教子女，甚至有坏的习惯，对子女的影响也是很大的。

3. 注意动机的转移

有些学生学习动机不够正确，如父母穷苦一生，望子成龙改换门庭，为了报答养育之恩而刻苦学习。这个动机是不完全正确的。教师要善于引导，把尽孝转移到振兴祖国上来，培养正确的学习动机和人生观。

有些学生在实验室里用进口设备做实验，感到设备先进，兴趣盎然，而对国产设备陈旧落后予以鄙弃，要引导他们，奋发图强。

兴趣和需要是诱发学习动机的有效激素，但是要注意防止脱离教材的趣味主义和只求标新立异花样翻新的形式主义。只把课堂搞得热热闹闹五花八门，并不能获得正确的学习动机与良好的学习效果。

2.6 心理差异与因材施教

学生除年龄、性别、体质、家庭、社会关系的差别外，还有心理上的差别，教师对所教学生应有所了解，才能因材施教、知人善导。

2.6.1 兴趣差异

兴趣是人们积极探究某种活动所表现的一种倾向，是主观能动性的一种体现。兴趣产生的基础是需要。随着需要的转移，兴趣也可以转移、改变和培养。巴甫洛夫说："兴趣是增强紧张度，引起大脑皮质活动状态的一种因素，所以凡是符合人们兴趣的工作或学习，就容易产生积极的效果。"因而兴趣往往是积极性、自觉性的前奏。

兴趣的产生和发展有水平上的差异，要经过一个过程：有趣→乐趣→志趣。

学生对不同课程、课外阅读、课外活动、体育活动、文娱活动的兴趣都存在差异，可以作出调查统计。中学生不应过分偏科，应把基础放在首位，有些学生有不良习惯或嗜好，教师要注意防止。目前有的学生不爱学数学，对他进一步学习有很大影响，作为教师是责无旁贷的。

2.6.2 能力差异

能力是直接影响活动效率的个性心理特征。能力包括智力（观察力、思维力、想像力、记忆力、注意力）、操作能力、组织管理能力和特长（文学艺术、外语、数学、技术、体育运动方面等）。

衡量智力有一种标准智商公式：

智商（IQ）＝智龄÷实足年龄×100

智龄就是智力年龄，有一种测验量表，用语言文字、图书物品等形式给儿童作解答，对一定数量的同年龄儿童进行测验，根据平均成绩确定智龄。例如一个5岁

儿童甲在5岁组测验及格，6岁组测验也及格，但7岁组测验不及格，则定甲的智龄为6，于是

$$IQ_{甲} = \frac{6}{5} \times 100 = 120,$$

认为甲聪明；如果另一5岁儿童乙的智龄为4，即

$$IQ_{乙} = \frac{4}{5} \times 100 = 80,$$

认为乙愚蠢。

美国心理学家特曼对2900个儿童进行测验，发现大多数儿童智商在（90，110）之间，少数在90以下和110以上。

据国外智力测验统计材料，在全部人口中智商分布大致如下：

智　商	分布状况	等级
69以下	1	低下
70－89	19	中下
90－109	60	中常
110－129	19	中上
130以上	1	超常

符合正态分布。

我国在一些城市对20万儿童进行智力普查，低常儿童（低下、中下）占学生总数的3%，超常儿童（含上表中常，中上、超常）占学生人数的40%。

人的能力表现有早晚的差异，有些人在童年就表现出某些方面的优异能力，称为能力早期表现，或早慧。我国古代文学家曹植7岁能诗，王勃4岁作赋，陈雷4岁作画，德国数学家高斯（1777～1855）9岁能解级数求和，近代控制论创始人维纳4岁能阅读，18岁得博士。与早慧相反，也有人大器晚成。大画家齐白石40岁才展现绘画才能，达尔文50岁才写成《物种起源》。华陀原来是研究数学的，近40岁才转攻医学，终成为我国中医鼻祖。

另外，我国5岁作诗的方仲永，20岁后转为平庸。妙笔生花的南朝江淹，后来"江郎才尽"，不复文彩风流，成为昙花一现人物。爱因斯坦、爱迪生在童年时曾被认为没有出息，但他们经过刻苦学习，都成为著名的科学家。可见后天教育的重要性。

卢梭（1712～1778）说："人生当中最危险的一段时间是从出生到12岁，在这段时间中还不采取摧毁种种错误和恶习的手段的话，它们就会发芽滋长，及至以后采取手段去改的时候，它们已经是扎下了深根，以致永远也把它们拔不掉

了"。陶行知也说过："教人要从小教起，幼儿比如幼苗，必须培养得直，方能发芽滋长，否则幼年受了损伤，即不夭折，也难成材。所以小学教育是建国之根本，幼稚教育尤为根本之根本。"罗素（1872～1970）在《教育与美好生活》中指出："儿童生来具有的各种本能和反射，能被环境发展成多种多样的习惯，从而发展成多种多样的品格，这种事情大多发生在儿童早期。所以，就在这个时期，我们努力培养品格是最有希望的。"早期教育能不引起我们教育工作者和家长的重视吗？

2.6.3 气质差异

人有四种气质类型（差异），其特征是：

(1) 胆汁质的人精力充沛，态度直率，工作热情，但比较任性、暴躁、鲁莽。

(2) 多血质的人活泼热情，善于交际，容易适应环境，但注意力不稳定，兴趣容易转移，行动散漫，缺乏毅力。

(3) 粘液质的人善于自制，沉着冷静，但对周围事物冷淡，萎靡不振，缺乏朝气。

(4) 抑郁质的人情感深沉稳定，做事谨慎小心，观察力敏锐，但疑心重，性格孤僻腼腆。

气质虽各有差异，但无好坏之分。任何一种气质都有积极的方面，也有消极的方面。大多数人则属于混合类型，可能某种气质特征比较占优势。教师要善于了解每一学生的气质特点有针对性地施教，使其成为性格开朗气质完善的人。

2.6.4 性格差异

人的性格千差万别，从行为方式上的性格特征可以考查三个主要方面：

(1) 意志特征：如自觉性与盲目性，独立性与依赖性，果断性与寡断性，纪律性与散漫性，坚定与任性，自制与放任，沉着与鲁莽，勇敢与怯懦等。

(2) 情绪特征：如乐观与悲观，心情开朗与抑郁，安静与激动等。

(3) 理智特征：如感知记忆思维的主观性与客观性，被动与主动，粗略与精细，严谨与轻率，深刻与肤浅，独立性与依赖性等。

性格不是各种性格特征的简单堆积，各种性格并非彼此孤立，而是相互作用相互制约的，会以各种不同的结合方式表现出来。教师应摸清学生的性格特征，才能有效地因材施教。

2.6.5 因材施教

心理学家柯克斯对公元1450～1850年四百年间出现的301位伟人进行研究，

发现他们智力高，而且在青少年时期所表现的性格就与众不同，富于自信、坚强、百折不挠。认为一个人的好学、成才，并不全在于才华，而很大成分在于理想、意志、毅力和勤奋，教师的提携也是主要的因素。

牛顿（1642～1727）、欧拉（1707～1783）、阿基米德（287B.C.～213B.C.）、高斯（1777～1855）是有史以来四大数学家。牛顿小时成绩低劣，被同学看不起。他受不了歧视，发愤图强，成为高材生，在剑桥大学受到巴鲁（1630～1677）教授的提携。他的三大发明（微积分、万有引力和光的分析）都发轫于23岁时候。1669年巴鲁老师宣称，牛顿的学识已经超过自己，将“路卡斯教授”的职位让给牛顿，传为佳话。这时牛顿才26岁。

数学家欧拉得益于他父亲保罗·欧拉（也是数学家），是他发现了小欧拉的天才。小欧拉13岁入巴塞尔大学，19岁发表船桅的论文获巴黎科学院奖金，26岁任教授。28岁右眼失明，59岁成为盲人，以惊人的毅力写作。大儿子A·欧拉也是数学家，为他笔录直到逝世，达17年之久。欧拉晚年心算能力很强，物理学家阿拉哥说：“欧拉心算好像一点也不费力，正和人呼吸空气，或老鹰飞翔一样”。

欧拉风格很高，拉格朗日（1736～1813）19岁起和欧拉通信，讨论等周问题的一般解法，引起变分法的诞生。等周问题是欧拉多年研究的问题，拉格朗日的解法，欧拉十分赞扬，谦让地压下自己的论文不发表，使年轻的拉格朗日获得巨大的声誉。变分法是于1766年由欧拉所创，但他却把荣誉让给了青年人。

挪威青年数学家阿贝尔（1802～1829）是一个遭遇不幸的伟人，家境贫寒，15岁时，教师洪保（1795～1850）耐心教导，资助他深造。1822年阿贝尔证明了五次方程的不可解性，寄给高斯，没有得到回信。他在德国认识了克列尔（1780～1855）。克列尔为他发表了22篇有创造性的论文。阿贝尔在贫病交迫中郁郁去世，年仅27岁。克列尔写信通知他已被任命为柏林大学教授，那时他已不在人世两天了。

另一位青年数学家伽罗瓦（1811～1832），小时在母亲辅导下学习，别人说他是笨蛋。17岁时数学教师里沙（1795～1849）把全副精力倾注在学生身上。伽罗瓦在里沙的指导下研究代数，成绩非凡。里沙称他是法国的阿贝尔，但两次没有考上法国理工大学。里沙把他的论文送给科学院。当时大数学家柯西（1789～1857）未能及时作出评价，后来连原稿也遗失了。1831年伽罗瓦因参加革命活动两次被捕，1832年在一次决斗中被击毙，只有21岁。决斗前手稿寄给朋友舍瓦利叶，以后发表的有伽罗瓦群，方程的根式可解性条件等，他是近世代数的创始人。他在遗书中写道：“我在分析方面作出一些新发现，有些是关于方程论的，有些是整函数的……公开请求雅可比、高斯对它的重要性发表意见。我希望将来有人发现，消除所有这些混乱对他们是有益的。”

上面四位伟人的成就都与他们的教师有密切的关系。伟人不是天上掉下来的，是经过教师精心培育的。唐代大文学家韩愈（768~824）说："世有伯乐，然后有千里马。千里马常有，而伯乐不常有。"教师应该像伯乐一样，发现千里马，精心培育，甘为"人梯"。前面提到的巴鲁、保罗、洪保和里沙就是伯乐，没有他们便没有牛顿、欧拉、阿贝尔和伽罗瓦。这是因材施教的第一点。

第二，教师要因势利导发展个性。教师只有摸清情况，才能因势利导，帮助学生发展个性，择善去恶，扬长避短，并在关键时刻，予以指导。本节所述兴趣差异、能力差异、气质差异、性格差异，都是为了摸清学生情况，目的在于因材施教，知人善导。

第三，对学生要严格要求、合理要求，要讲清道理，使人心服，不要走过场。要让学生"跳起来摘桃子"，使他们伸手不得，跳而有获。过严和不严同样是不对的。要求要使学生理解，并乐于接受，积极完成。

第四，关心差生（成绩差的学生），消除差生的落后面，改变差生的自卑感、逆反情绪与对抗心理。挽救差生是关系国家社会的大事，也是直接影响差生一辈子的大事，必须使之"小以小成，大以大成，无弃人也"（朱熹）。因材施教应该包含长善与救失两个方面，缺一不可。

第五，指导学习方法。学习方法的好坏，直接影响学习效果，教师要重视指导学生改进学习方法：

(1) 学习方法是受制于学生的学习目的、学习自觉性、勤奋与是否珍惜时间。

(2) 学习方法好坏的一个重要因素是主动地安排学习计划，并努力地执行这个计划。

(3) 让学生明确，要使知识成为自己的东西必须掌握三个环节：理解、练习与记忆。要边学、边理解、边练习、边记忆。要重视上课的效果，会听、会想、会记、会提问题。

(4) 要习惯于看书，练习、复习、整理、记忆，使知识系统化、理论化，养成良好的学习习惯，今日事今日毕。

学生的学习方法是教师学习方法的影子，我们在后面的章节中还要举例示范。

2.6.6 奖励与惩罚

奖励与惩罚是对个别人的一种教育手段，也将引起对一般学生的心灵反应。心理学认为通过奖惩作用于个人的情感，使个人产生愉快感或厌恶感，从而增加或减少心理指向性的强度；通过奖惩，影响到个人的行为，对个人所进行的活动，能起到激发或抑制的作用，从而调节心理指向性的方向；通过奖惩，提高个

人的认识水平，使其是非观、荣辱观更加正确，使其抱负水平、志向水平也能得到提高。

心理学界对于奖惩还有一些争论，如需不需要奖惩？是否能废除奖惩？能否只奖而不惩？奖与惩的作用是否相等？物质奖励与精神奖励的优劣及其关系等等。

如何运用奖惩？需要注意以下几点：

1. 奖励与惩罚要以奖励为主

心理学家赫洛克（Hurlock）做了一个实验，他把学生分成四组，学习同一难度的内容，A组为受表扬组，经常受到表扬，成绩扶摇直上；B组为受谴责组，责备经常不断，开始还起点作用，后来就“疲”了，成绩持续下降；C组为被忽视组，只在一旁静听前两组所受到的表扬与谴责，学习成绩比前两组都差；D组为控制组，听其自然，既不表扬谴责，也不让其听到别组的表扬谴责，学习成绩最差（图3）。

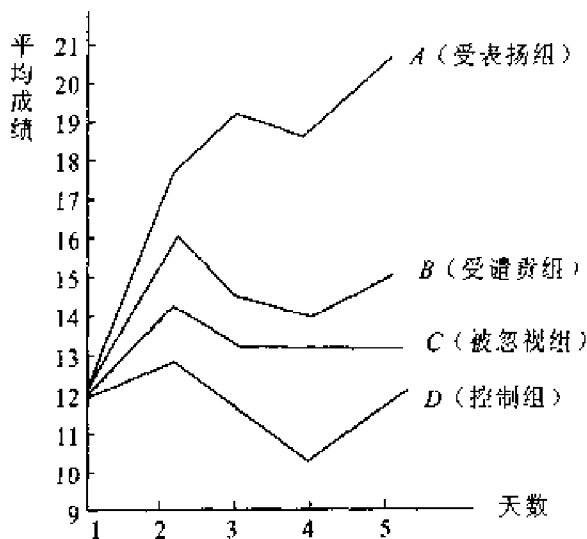


图 3

赫洛克得出结论：奖惩都是必要的，不给予奖惩会引起学习成绩下降，而奖励比惩罚对学习的促进作用更大。

美国心理学家特尔福德（Tolford）进行了长达三十年的研究，也得相似的结论：称赞和颂扬等阳性诱因比斥责和惩戒等隐性诱因效果好；斥责比没有诱因好；比较鲁钝的儿童通常对于颂扬反应得较积极，而对于比较优秀的儿童，则斥责比较有效，两性之间只有轻微的差别：男孩易受斥责的影响，而女孩易受颂扬的影响。

我们也不妨设计一些教育实验，加以研究。

2. 奖惩都是手段，不是目的

奖惩是从两个侧面鼓励鞭策学生，使之上进，达到品学兼优的目的。如果把奖励作为目的，就可能不择手段，甚至弄虚作假以骗取荣誉。如果这样，那就不是奖励学生而是腐蚀学生了。如果以惩罚为目的，对学生的错误表现得嫉恶如仇，则必引起学生的反感和对立，收不到惩前毖后的效果，而且将丧失师生的感情。

奖惩的对象，只限于被奖惩的事，不能抓住一件事对一个人作出全面结论。不能因一次竞赛得第一，就捧上天，也不能犯一次错误，就说一贯表现不好。

奖励应以精神奖励为主，对学生进行物质奖励不宜用现金，可以奖些文具之类的东西。同样惩罚对于学生也不能采取罚款的办法。

3. 注意方式，着重实效

学校的奖惩，重在教育，塑造灵魂，必须注意方式，收到实效，使人心服。当然首先要把事情搞清楚，要公平合理，不能凭爱憎定奖惩。还要注意学生的年龄特点、个性特点、成绩差异等。一般年龄越小，口头表扬效果较好；年龄大了，口头表扬就不那么灵了。对成绩差的学生要多鼓励少批评；成绩好的学生，对批评很敏感。对学生要力戒讽刺挖苦，教师的态度是师生关系的晴雨表，要慎之又慎。

2.7 道德品质教育

2.7.1 对学生进行道德品质教育的意义

学生的心理面貌是由两个方面构成的：

(1) 智力才能，体现出他为社会服务的本领；

(2) 思想品德，表明他为社会服务具有什么样的思想感情和道德品质。

对学生的道德品质的培养与教育，是关系到国家的物质文明建设与精神文明的重大问题，关系到国家和民族的未来。

道德是一种社会现象，属于社会意识形态。道德不是与生俱来的，要使学生树立良好的道德品质，靠什么呢？只有靠教育、靠教师。荀子（B.C.313～238）说："人无师法，则隆性矣；有师法，则隆积矣。"作为教师，任重道远，责无旁贷。

2.7.2 道德品质的心理结构

任何一种道德品质都包含四种心理成分：道德认识、道德情感、道德意志和道德行为，简称为道德的知、情、意、行。它们相互依存、相互促进，缺一不可，构成一个统一体，这就是道德品质的心理结构。

道德认识与道德行为在这个心理结构中处于支配地位，起着主导作用。道德认识提供认识上的依据，为整个道德品质及心理结构奠定基础，往往作为进行德育的开端环节；道德行为则作为道德品质形成的终端环节。

在道德认识与道德行为的关系上存在着唯智派与行为派的争论。

唯智派认为，人们的道德品质决定于认识，苏格拉底曾说："知识即道德。"认为认识正确就有道德。人之所以犯罪，是出于无知。于是谆谆乐于说教，讲大道理。这并不能说服学生不犯错误，因为这些大道理人人会讲，学生也知道，有

些犯错误学生的保证书，都说得一清二楚。唯智派夸大了道德认识的作用，把它估计过高，抹煞了其他道德品质成分的作用，以道德认识单一因素取代了其他因素。因此，单纯的说教并不能解决问题。

行为派处于另一端，认为人的品质由于形成了坏的行为习惯才会变坏，要重视行为的练习和习惯的培养。斯金纳认为，要养成好的习惯，必须控制环境，组织行为训练，运用奖励和惩罚，以利于人们的道德行为按照正常的方向发展。他们无视道德认识及其他品德成分的作用，无视心理的内在活动，这样可能导致学生不能明辨是非，无知低能，出现蠢人干蠢事的现象，犯了错误还不知怎么犯的。

美国哈佛大学心理学家科尔伯格（Kohlberg）教授认为，道德观念上的成熟，应该以道德行为的成熟为标志，即道德认识与道德行为是一致的，即知行统一，说服教育与行为训练相结合，既要晓之以理，又要导之以行，这就是辩证唯物主义的道德观，也是我国曾经提倡的知行统一观。

道德情感与道德意志在道德品质心理结构中处于中间环节，是实现道德认识向道德行为转化的内部条件，道德情感是在道德认识的基础上产生的。道德情感又可以反作用于道德认识，在某种程度上影响道德认识的倾向。一定的道德认识与相应的道德情感发生共鸣，激发道德动机，就成为推动道德行为发生的动力。即“认识→情感→意志(动机)→行为”。

2.7.3 道德品质形成的心理过程

1. 道德认识的形成

道德认识形成的过程，也是对道德认识的感知、理解、掌握的过程。学生道德认识的形成，受学校、家庭、社会、个人的主观能动性以及知识水平、思想修养等因素的影响，既有共性也有差别。

掌握道德知识是形成道德认识的前提。在教育过程中，要使学生掌握道德概念，如好与坏、对与错、诚实与狡猾，应该按照具体与抽象相结合的原则，运用生动的实例，帮助学生理解道德知识。如果学校、家庭、社会的教育影响一致，他们就比较容易形成正确的道德概念。对一个 3～9 岁的儿童的教育尤其重要。如果三方面教育影响不一致，就容易形成模糊的或错误的道德概念，在他们的心理上产生“意义障碍”，阻碍他们真正理解道德要求和意义。

意义障碍产生的原因有：

(1) 道德要求违反学生自己原有的主观需要；

(2) 要求过于频繁，又不督促检查执行，甚至教师（或家长）没有以身作则；

(3) 提出要求时，采取了强制的方式，损害了学生的自尊心；

(4) 学生对要求实质的误解；

(5) 学生认为教师不公正、有偏爱；

(6) 教师对学生的思想和心理状态不了解，要求脱离实际等。

在这些原因中，有些对立情绪是由于教师不尊重学生的人格引起的。教师不尊重学生，学生在心理上也不尊重教师，由于“意义障碍”同教师唱反调，甚至无理取闹，自然谈不上接受教育了。

道德评价是学生应用已有的道德标准和道德知识，对人对己所发生的道德行为的是非善恶进行判断的过程。道德评价可以增强学生对道德知识、道德标准、道德意志的理解，体验道德情感，建立道德信念，增强集体荣誉感。

科尔伯格对于道德评价作了一系列的实验研究，他设计了一套“两难问题”要儿童回答，例如，“有个妇女患癌症快要死了，而药店老板故意抬高药价，她丈夫没钱买药治病，不得已到药房偷了药。”问学生，她丈夫应该这样做吗？为什么？不偷药就不能救他妻子，偷了药又要犯法，这是个“两难问题”。

科尔伯格根据调查资料，把学生的回答分为不同水平的三个阶段：

(1) 低级阶段。认为病妇丈夫做得对，“因为药店老板只管赚钱，不顾别人的死活，老板本人就是一个盗贼。”“因为他为了救病人需要药才去偷。”

(2) 中级阶段。认为病妇丈夫偷药的行为是不对的。“偷总是不好的，不应该偷；如果大家都偷，那怎么行？法律不管怎样不合理，总应该遵守，应当受到法律的制裁。”

(3) 高级阶段。认为病妇丈夫的做法是正当的。“因为人的生命的价值要比什么都宝贵，怎么可以允许药店老板随便非法赚钱呢？（当然这一点应该有根据）这种法律应当加以改变。”“这是病妇丈夫对药店非法赚钱的做法提出的抗议，而且也甘心为此受到社会当局的惩罚。”

科尔伯格认为，这种道德评价同人的信念直接联系起来，人能坚持自己的信念而不顾自己的生命，这是最高阶段的道德评价，是道德成就的标志。他还认为，道德评价发展的阶段是有普遍性的，但不是所有的人都能到达最高的阶段。

道德信念是在道德知识的基础上确立的，它既是对道德标准的深刻理解和牢固掌握，又能激发道德情感，推动道德行为的发生。道德信念是道德意志的高级层次，是道德品质形成的关键因素。

学生道德信念的确立，依赖于：

(1) 道德认识的逐步深刻，由道德知识转化为道德信念；

(2) 通过实践使学生获得道德行为的经验和道德情感的体验，成为行动中的动力；

(3) 集体荣誉论的影响；

(4) 道德理想的作用；

(5) 有了科学的世界观，就能深刻认识道德的本质及必要性，从而获得坚定的道德信念。

2. 道德情感的发展

道德情感是人们的道德需要是否得到满足而引起的内心体验。道德情感的发展，一般经历三种发展水平：

(1) 道德情绪，如对某种不道德的行为感到厌恶、愤怒、冲动；

(2) 道德情感，比道德情绪要稳定，持续的时间较长，外部表现不如道德情绪明显；

(3) 道德情操，是道德感、正义感、理智感和美感交织发展成的综合体，是一种具有概括性、持久性、稳定性的社会情操。

3. 道德意志的锻炼

道德意志主要表现在两个方面：

(1) 克服内部障碍，以道德动机战胜非道德动机；

(2) 排除外部障碍，执行由道德动机所引出的行为决定。

道德意志的基本过程可以划分为三个阶段：

(1) 道德动机的斗争阶段；

(2) 战胜困难的斗争阶段；

(3) 实现行为目的的阶段。

它们是相互联系、相互促进的，三者之间都成正比，都体现着意志力。

评判一个人道德意志的强弱，一般要根据道德意志的品质，这种品质主要是：道德意志的自觉性、果断性、自制性、坚持性。这四种品质对道德意志行动来说是至关重要的。因此，道德意志的锻炼与培养，应着重培养这四种道德意志的品质。

4. 道德行为的训练

当道德认识和道德情感成为道德行为的动力时，就形成道德动机（意志），而表现在行动上就是道德行为。衡量和评价一个人的道德品质，主要是看他的行为，只有道德行为才使道德品质具有社会价值。

道德行为的训练主要包括两个方面：

(1) 道德行为方式的掌握，例如介绍某些典型人物的方式，使学生有所效法。我们可以通过介绍我国古代某些教育家、数学家、医学家的光辉事迹和成长过程，可以提高学生选择道德行为方式的能力、道德智力水平以及热爱祖国的献身精神。

(2) 道德行为习惯的培养，如团结友爱、助人为乐是我国的传统美德，学生如果常做好事，就不会损人利己，在学校、家庭、社会中形成誉论。又如爱卫生、爱护公物，能在学校养成习惯，对社会上的脏乱差现象就可以形成一种抵制

的誉论。这些良好的习惯，应该在学校里形成，“小气候”也可以影响“大气候”，何况我们的学生将来都要走向社会呢！

2.7.4 道德品质教育的教训与艺术

前面三个问题是从正面来说的，但从教育的角度，对学生进行说服教育时，往往说而不服，不易为学生所接受，理由何在呢？

第一，道德品质是逐步培养的，非朝夕之功，很难立竿见影；

第二，大道理人人皆知，也很简单，说服力不强，现在喜欢采取作报告的形式，不受学生欢迎；

第三，教育者在学生中的威信不高，甚至自己没有做到，“不能正己，焉能正人”，等等。

我们先看一个“看小说”的例子。

有个中学搜集了许多学生爱看小说耽误学习的例子，由领导作报告，并规定学生不许看小说。

一天食堂钟声响了，初中二年级学生李平带一本小说上食堂，胡老师看见了，对李平说：“你又看小说？把书拿出来！”李平无可奈何地把小说交给了胡老师。

这时郑老师走进食堂，看到李平无精打采，郑老师问：“李平，吃饭香吗？”李平喜欢郑老师的口气，随口说“有时香，有时不香。”郑问：“今天呢？”李说：“胡老师没收了我的小说，现在一肚子的气，饭都吃不下！”郑老师说：“胡老师怕你耽误学习，书会还给你的。”

过了一天，李平到胡老师家，走到窗下，里面有人说话：“老胡，你怎么有这些小说？”胡说：“都是从学生那里没收来的！”那人说：“你还不还给学生？”胡说“还给学生，那没收是为什么？”李平不敢进去，生气地走了。他对胡老师成见更深了，对“看小说”这回事无所触动。

学校既然规定学生不许看小说，怎么让教师随便没收学生的书呢？那么《红楼梦》、《水浒》、《钢铁是怎样炼成的》岂不都打入“另册”了吗？当然，当事人会辩解其没收的是坏小说，但校领导的报告却说得一清二楚：“哪些小说是好的，哪些是坏的，你们还缺乏鉴别能力；为了使你们把精力投入到正常的学习上去，只好规定：学生不许看小说。”

有些学校像这类没说清楚的“土政策”，可能还有，这又如何能使学生有所领悟有所进步呢？

让我们再看一个“谈恋爱”的例子。

在中学里是明文规定学生是不许谈恋爱的。有些学校并没有认真贯彻，加强教育。有的生物教师在讲有关性知识时说：“上面规定学习时期不许谈爱，这一

段我们就不讲了。"

有的学校发现了学生恋爱的事，认为这是难免的，睁一只眼闭一只眼算了；也有的大做文章，惩一儆百，闹得当事双方只好退学，有的甚至被迫自杀。有的班风不好，男女同学的正常交往，被歪曲上纲，满城风雨，永无宁日。这怎么能让家长放心、孩子们上进呢？

在有的学校里采取了另一种做法，学校领导听取有关班主任关于"恋爱风在潜行"的汇报之后，建议大家学习任小艾的精神："热爱、尊重、理解、引导"，对怀疑有恋爱行为的学生进行家访、谈心、交朋友、再研究，力争把问题解决在萌芽之中。学校领导的这一决策，得到了班主任的支持与贯彻，在预计的 29 对对象中，实际上只有 6 对，经过"理解和引导"都已获得较好的解决，只有 2 对在班上有些影响。

对学生进行道德品质教育是一项认真踏实的思想工作，任何简单粗暴、急于求成是不行的，它是一门艺术，只有关心青年成长，热心教育事业的人才能达到顶峰。

培养学生的道德品质，是我们教育的目的，是会有反复的，教师要预见到，也要向学生讲明。但决不能阳奉阴违，当两面派。重要的在于真正理解，身体力行。教师尤其要言行一致，为人师表。

教师的职责在于教书育人，一有差错，遗误青年。为了使教师获得道德品质教育的艺术，在本篇最后一节，以"历史轶事设计教学"的标题，介绍了我国历史上的优秀人物，作为道德品质教育的实例补充。

3 教学论概述

“夫人不能生而知，必待学而后知，人不能皆好学，必待教而后学，故作之师，所以教养也”（《上李鸿章书》）

——孙中山

“学者所以为学，学为人而已。”

——陆九渊

“教师所知道的东西，就应当比他在课堂上要讲的东西多十倍，多二十倍，以便能够应付裕如地掌握教材，到了课堂上，能从大量的事实中挑选出最重要的来讲。”

——苏霍姆林斯基

3.1 教育的地位及经济功能

我国北宋胡瑗（983～1059）在《松滋儒学记》中说：“致天下之治者在人材，成天下之材者在教化，职教化者在师儒。”从教育史来看，古今中外都是靠教育来传授知识、培养人才、治理国家。学校教育的作用，可归结为系统、持久、适时、科学，是家庭、政权、法律所不能代替的。

但是长期以来，教育却被认为是一种消费，没有经济功能。从国家投资来看，表面上也看不出有多大经济效益。要改变这种观点，不作调查研究，不让事实说话，是徒劳无功的。

日本明治维新，派人到英国学习经济管理、造船、办工厂，回国后这些人当工程师、会计师、厂长。比雇聘外国专家，大大节省开支；办学校训练工人，短期内提高劳动生产率2倍，认为是最合算的投资；于是提出“教育为立国之本”，以后又提出“教育、技术为立国之本”，提高教师待遇，尊敬师长，经100年的努力，成为世界上第一经济大国，他们的实践，改变了教育没有经济功能的陈腐之论。

1924年苏联斯特鲁米林最先在《国民教育的经济意义》一文中说：“一年的学校教育，比同样时间在工厂工作，平均能提高工人劳动生产率约1.6倍。”1980年苏联科马洛夫从统计资料得出：“教育水平每提高1%，社会劳动生产率提高1.4%；教育上每花费1卢布，能生产4.13卢布的国民收入。”

美国经济学家舒尔茨创人力资本学说，他根据统计数字，“教育投资的收入

在劳动收入增长中的比重是70%，在国民收入增长中所起的作用是30%。美国50年来物质资料投资增加4.5倍，利润仅增3.5倍；而智力投资增加8.5倍，利润增加达17.5倍。”据联合国调查统计，劳动者的智能同他们所受的教育成正比，小学毕业能提高劳动效能43%，中学108%，大学300%。劳动者的文化水平越高，技术作业的能力越强，生产的产品质量也越好。

现在发达国家进入了信息（Information）的时代，在世界范围内进行一场科学技术的竞争，也是一场人的素质的竞争，而人的素质的提高在于教育，智力投资成为这场竞争胜利的关键。美国已预感到形势的严峻，1983年4月美国高质量教育委员会向总统报告说：“国家处于危险之中，教育改革势在必行。我国社会的教育基础，目前受到日益增长的庸庸碌碌的潮流的腐蚀，它威胁着整个国家和人民的未来。上一代还难以想像的情况开始出现了，其他国家正在赶超我们教育上的成就。……历史对游手好闲的人是无情的。……美国在世界上的地位正在动摇，……这种危机，不仅因为日本生产汽车的效率比美国高，不仅在于南朝鲜建造了世界上生产率最高的钢厂。不仅在于美国机床的地位被德国取而代之，问题在于知识、学问、信息，在世界上的竞争力在减弱，人的素质在减弱，出现了更多的游手好闲庸庸碌碌的人。”这份报告，值得一读，值得警惕。

3.2　教学论研究的对象与方法

教学论是研究教与学的理论与实践的一门科学，是教育科学的一部分。在较长的时期内在优秀教师的实践中，积累了很多宝贵的材料，系统的论述则从十六世纪才开始。拉特克（1571～1635）认为“教学论是科学、语言和艺术”；夸美纽斯（1592～1670）认为“教学论是将一切事物教给人的全部艺术。”维尔曼（1839～1920）则认为“教学论是教育理论，教育的主要作用是形成学生的意志，发展人的精神力”。近二十年来教学论广泛采用心理学的结论作为理论的依据，本篇把教育心理学放在第一章，就是出于这种考虑。

教学论研究的对象是：

（1）学校教育的任务和内容（本书从略）；

（2）学生掌握知识与技能的过程；

（3）教学原则、教学方法、教学组织形式。

教学论研究的方法有观察法、实验法、研究文件、学用结合、总结经验等。

1. *观察法*

主要是观察教与学的过程、学生的思想、学习态度与学习上的困难。它是发现真理的重要方法，教学中要注意培养学生这种思想方法。现举例加以说明。

1934年生物学家Gause在实验室里用双小核草履虫（Ⅰ）和普通草履虫

（Ⅱ）做了两种实验：

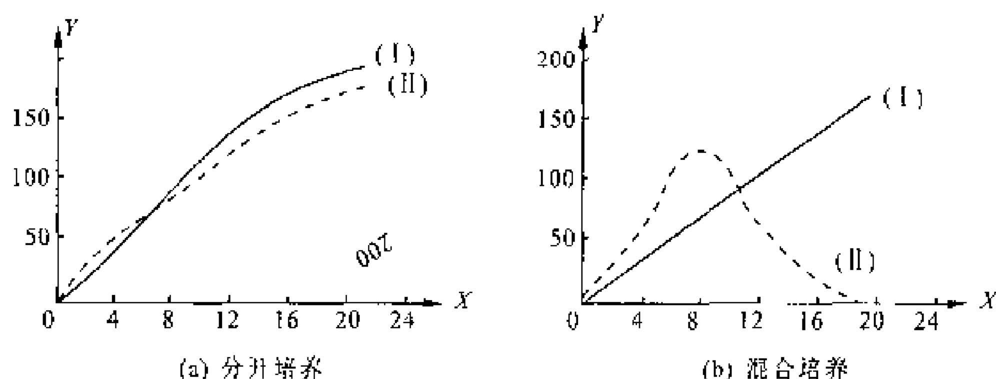


图 4

第一种分开培养。将两种草履虫放到两个容器内，定时增加养料，使其正常生长繁殖。将观察结果制出平面图，以时间（天数）为X轴，密度（单位体积内的草履虫数）为y轴，先描点，再联成平滑曲线［图4（a)］。

从图4（a）看出，Ⅰ、Ⅱ都呈S形曲线增长，两者差别不大。

第二种混合培养。将两种草履虫放到一个容器中培养，同样画出观察图形。

从图4（b）看出，由于两者吃同一种食物，两个群体之间产生了竞争，（Ⅰ）是竞争胜利者，它的数目不断增加长，（Ⅱ）是失败者，很快趋于灭绝。Gause从这一实验的观察作出结论：在一个小的环境中，吃同样食物的两种生物不能共存。这就是竞争排斥实验定律，生态学上称为有不同的生态位。

1948年Park做的实验，验证了这个定律的普遍性。现在它被用来作为生存竞争原理的重要验证。

2. 实验法

很多探索性的有创造性的工作，大多数是从实验开始的，实验法是人们探索未知领域的一种富有独创性的研究方法。实验又是验证知识、训练技能、培养能力的重要手段。§2.2中巴甫洛夫所做的关于狗的实验，斯金纳所做的饿鼠实验，桑戴克所做的猫的实验，苛勒的黑猩猩实验，分别是条件反射论、操作性条件反射论、刺激反应联结理论和顿悟说的基础，对一个科学工作者是具有重要意义的。中学的物理、化学、生物、数学、体育等科教师应从这些实例获得启示，这对于提高教学水平是大有助益的。

观察法与实验法实际上可以合称为观察实验法，这里只是侧重两个不同的步骤而已。

3. 研究文件，学用结合

培养人才是国家下达的任务，教师必须研究国家的有关政策法令和文件，使

自己的工作有所遵循，并符合国家总的要求，使自己的世界观与国家要求所培养学生的世界观相一致。

学科学的目的在于应用，在于奠基，为后继课程服务，为邻近课程服务，为基础服务，为技术服务，为发展智力培养能力服务，为终身教育服务。因此学用结合是发展教学论的重要研究方法。

4. 总结经验

教学论的发展，本质上是教学实践的科学总结，“授人以鱼，一饭之需；教人以渔，终身受用。”教学要有所进展，一定要经常总结经验，并提到理论的高度来加以鉴定。

3.3 教学论的进展

3.3.1 我国古代在教学论上的贡献

我国从春秋战国（B.C.770～222）到汉（206B.C.～220A.D.）晋（265～420）隋（581～618）唐（618～907）处于开放系统时期，不断从西域北方乃至波斯、印度、日本，互通物资信息，进行文化交流，壮大了中华民族的物质文明和精神文明，使中国成为世界上的文明古国。

在科技上，造纸、火药、指南针、印刷术四大发明；14世纪以前我国古代代数在世界上处于领先地位，被誉为数学王国；从华佗、张仲景到李时珍，中医自成流派，享有医学王国美称；在教育上也是有纲领、有体系、有组织、有方法，教育了我中华民族垂二千余年，去其糟粕，取其精华，择其善者而从之，硕果累累。下面以各名家语录作为代表，阐明我国在教学论上的主要贡献。其中有些过时的论点，须以古为今用、古为今鉴的观点来看待。

1. 教书育人

孔子提出智仁勇，是德智体全面发展的首创者，他的主要论点有：

“智者不惑，仁者不忧，勇者不惧。”

“孝悌也者，其为仁之本与！”

“君子食无求饱，居无求安，敏于事而慎于言，就有道而正焉，可谓好学也已。”

“学而不厌，诲人不倦。”

“发奋忘食，乐以忘忧，不知老之将至。”

孟轲（B.C.372～289）在这方面的论点有：

“富贵不能淫，贫贱不能移，威武不能屈，此之谓大丈夫。”

“故天将降大任于斯人也，必先苦其心志，劳其筋骨，饿其体肤，空乏其身，行拂乱其所为，所以动心忍性，增益其所不能。”

“乐民之乐者，民亦乐其乐，忧民之忧者，民亦忧其忧。乐以天下，忧以天下。”

“君子有三乐，而王天下不与存焉。父母俱在，兄弟无故，一乐也；仰不愧于天，俯不怍于人，二乐也；得天下英才而教育之，三乐也。”

“子路人告之以有过则喜，禹闻善言则拜。”

陆九渊：

“学者所以为学，学为人而已。”

2. 尊师重道

孔子：

“道之所存，师之所存也。”

“三人行，必有我师焉。择其善者而从之，其不善而改之。”

“其身正，不令而行；其身不正，虽令不从。”

“见贤思齐焉，见不贤而内自省也。”

韩愈（768～824）：

“师者所以传道、授业、解惑也。”现在的解释是“传爱国主义，集体主义，社会主义之道。授业是教授学生建设祖国的知识和技能，解惑是要引导学生去思考、创新，培养学生的创造性思维。”

“古之学者必有师，所以通其业，成就其道德者也。”

“弟子不必不如师，师不必贤于弟子。”

“圣人无常师。”

3. [illegible]

"读书之法，循序而渐进，熟读而精思。"

必困。”

王安石（1021～1086）：

“苟不可以为天下国家之用，则不教也；苟可以为天下国家之用者，则无不在于学。”

朱熹：

“学之之博，未若知之之要；知之之要，未若行之之实。”

8. 教学相长

《礼记·学记》：

“教学相长，教学半。”

“虽有佳肴，弗食不知其旨也。虽有至道，弗学不知其善也。是故学然后知不足，教然后知困。知不足，然后能自反也；知困然后能自强也，故曰教学相长也。《兑命》曰：教学半，其此之谓乎！”

“青，取之于蓝，而青于蓝；冰，水为之而寒于水。”

荀况：

“非我而当者，吾师也，故君子隆师。”

“师术有四，而博学不与焉。尊严有惮，可以为师；誉文而信，可以为师；诵说而不陵不犯，可以为师；知微而论，可以为师。”

王夫之（1619～1692）

“推学者之见而广之，以引之于远大之域者，教者之事也。引教者之意而思之，以求于致此之由者，学者之事也。”

“欲明人者先自明，博学详说之功，其可不自勉乎！”

陶行知（1891～1946）：

“要想学生学好，必须先生学好。惟有学而不厌的先生，才能教学而不厌的学生。”

“为学而学，不如为教而学之亲切，为教而学必须设身处地，努力使人明白；既要努力使人明白，自己便自然的格外明白了。”

9. 敏而好学（学习态度）

孔子：

“敏而好学，不耻下问，是以谓之文也。”

“知之为知之，不知为不知，是知也。”

孔伋：

“人一能之，己百之；人十能之，己千之，果能此道矣，虽愚必明，虽柔必强。”

孟轲：

“舍其路而弗由，放其心而不知求，哀哉！人有鸡犬放，则知求之；有放心

而不知求。学问之道无它，求其放心而已矣。”

“心之官则思，思则得之，不思则不得也。”

“求则得之，舍则失之，是求有益于得也。”

“有为者辟若掘井，掘井九轫而不及泉，犹为弃井也。”

“今夫弈之为数，小数也；不专心致志，则不得也。弈秋，通国之善弈者也。使弈秋诲二人弈，其一人专心致者，惟弈秋之为听。一人虽听之，一心以为有鸿鹄将至，思援弓缴而射之，虽与之俱学，弗若之矣。为是其智弗若与？曰，非然也。”

10. 有志者事竟成

墨翟：

“志不强者智不远，言不信者行不果。”

徐干（171～218）：

“志者，学之师也；才者，学之徒也。学者不患才之不赡。而患志之不立，是以为之者亿兆，而成之者无几，故君子必立其志。”

张载（1020～1077）：

“学者大不宜志小气轻，志小则易足，易足则无由进；气轻则虚而为盈，约而为泰，亡而为有，以未知为已知，未学为已学。”

“人若志趣不远，心不在焉，虽学无成。”

王守仁（1472～1528）：

“志不立，天下无可成之事，虽为工技艺，未有不本于志者，……志不立，如无舵之舟，无行之马，漂荡奔逸，终亦何所底乎？”

从以上各名家语录看来，我国古代在教学论上硕果非凡，且涉猎甚广，立人达人，很有创见。我国传统教育的精华是“教书育人，尊师爱国，自强不息，有志竟成”。如以古为今用的观点加以整理，可与西欧教学论并驾齐驱。

3.3.2 西欧教学论的进展

16世纪以来，西欧由于工商业、航海、天文学的发展，再次处于开放状况，导致文艺复兴。由于生产与生活的需要，要求普及教育，提倡科学，尊重人材。在这一形势下先后涌现了很多先进的教育家和他们的教育思想，摆脱了宗教和封建思想的束缚，给教学论开创了新的局面。现取各家之长略加介绍。

1. 夸美纽斯（捷克，1592～1670）

他反对学校的等级性，主张不分性别、财产，对全体儿童进行教育，还倡导教学的系统性原则和基础性原则。他有一些著名的言论：

“学校是造就人的工厂。”

“在感觉中没有出现过的，在理智中即不可能存在”（实质上否定上帝的存

在)。

"采取一切方法激发儿童对知识和学习的强烈愿望。"

"一切功课的排列都要使后学的功课能够依靠先学的功课，要使一切先学的功课能靠后学的功课固定在心里。"

2. 卢梭（法，1712～1778）

他倡导教学民主，培养能力。他的论点有："问题不在给他们讲授科学，而要启发他们的兴趣，使他们喜爱科学，并教给他们一些方法，使以后能进行研究工作。"

"教育的最大秘诀是使身体锻炼和思想锻炼互相调剂。"

"在道德教育方面只有一条，既适合于孩子而且对各种年龄的人来说都最为重要，那就是：绝不损害别人。"

"为了使一个青年能够成为明智的人，就必须培养他有他自己的看法，而不能硬是要他采取我们的看法。"

"说教之所以最没有用处，其原因之一就是它是普遍地向所有一切的人说的，既没有区别，也没有选择。"

3. 裴斯泰洛齐（瑞士，1746～1827）

他提出教学的教育性原则，也就是教书育人，强调道德品行教育。他说：

"儿童的道德感必须首先从他们富有生气的纯洁的感情所引起；然后他们必须练习自我控制，并教导他们关心一切公正和善良的东西；最后，他们必须通过思考和比较，自己形成关于他们的地位和环境所应有的道德权利和义务的观念。"

"须破除人与人之间的疑忌而代之以互相信赖，破除自私自利而代之以公众利益；将人培养成典型的公民，使能发挥公民的才能。"

4. 赫尔巴特（德 1776～1841）

他提出书本、课堂、教师三中心论，认为教育过程是书本知识、课堂灌输与教师主导。强调教师的权威，主张分科教学，他把兴趣作为教学的基本目标，也是讲授中引人入胜的重要手段。培养学生的兴趣，即培养他们经常地、创造性地获取知识的意向，并使所学知识逐步达到更高的系统化的意向。他是西欧最有影响的教育家。

他认为知识的形成有四个阶段：

(1) 明了（在静态中学习）；

(2) 联想（在动态中学习）；

(3) 系统（在静态中理解）；

(4) 方法（在动态中理解）。

或者说："学习＋理解＋兴趣"，才能形成知识。

他曾说：

"我想不到有任何无教学的教育，正如在相反方面，我不承认有任何无教育的教学。"

"可以产生几种不同的教学方法，经常习惯于一种方法而排斥其他方法是不必要的，不同方法是不容许互相排斥的。"

5. 乌申斯基（俄，1824～1871）

他倡导把教育学和生理学、心理学结合起来，并提出直观性原则、基础性原则。他有一些重要的论述：

"儿童的天性明显地要求直观性。"

"知识和思想的基础打得越巩固，将来在这一基础上建立起来的大厦也就会更宏大而且更坚固。"

"在学龄期，学习和教育应当成为人们生活的主要兴趣，但是为了学习和教育，必须使受教育者包围在良好的气氛中。如果环绕儿童或青年周围的一切事物完全把他从学习吸引到相反的一面，则教师要灌输他对学习的尊重的一切努力将是徒劳的。"

"教育家在数量上不得少于甚至应当多于医学家，如果把我们的健康信托给医学家，那么就要把我们子女的道德和心智，信托给教育家，把子女的灵魂，同时也把祖国的未来信托给他们。"

"不管教育者或教师如何把他的最深刻的道德信念隐藏得怎样深，而只要这些信念在他内心存在着，那么，这些信念也可能表现在加在儿童身上的那些影响上，并且这些信念愈是隐蔽，则它们的影响作用愈是有力。"

6. 第斯多惠（德，1790～1866）

他提出教学的现代性原则、发展性原则和发展式教学法。他的主要论点有：

"教学内容必须符合现代化科学水平。"主张淘汰过时的教学内容。

"教学必须符合人的天性及其发展的规律。教学必须符合受教学生的发展水平，要符合当前的水平，而不是未来的水平。"

"教师必须有独创性。他对学生要成为理性和启蒙的真实的火炬，使学生得以揭穿自己的错误意见，而被引导到真理的道路上去。"

"不好的教师是给学生传授真理，好的教师是使学生寻找真理。一个坏的教师奉送真理，一个好的教师则教人发现真理。一个真正的教师指点他的学生的，不是已投入了千百年劳动的现成的大厦，而是促使他去做砌砖的工作，同他一起来建造大厦，教他建筑。"

"学生的能力愈成熟，就愈要向他提出困难的教材，因为可以预料，业已壮大起来的能力能使这种教材成为学生心智的财富。"

7. 杜威（美，1859～1952）

儿童中心论者，他对传统教育是一大冲击，认为教育即生活，学校即社会，

要在做中学，否定教师的主导作用。把对青年的教育引导到狭隘的实用主义圈子，轻视理论，主张开一些五花八门的学科，如档案工作、焊接、房屋装饰，用商业数学、消费数学代替数学，降低了知识水平。与他持同一观点的，有布尔顿(美 1890 - ?)。

杜威、布尔顿的教学思想，虽然在实践中失败了，但它对世界有一定的影响，如日本的职业教育、苏联的综合技术教育，中国教育家陶行知的教学做合一学说。他们重视实验的思想已成为科学研究的重要思想方法。

杜威说：

"教育必须从心理学上探索儿童的能量、兴趣和习惯开始。"

"学校是应用心理学的实验室。"

"教学必须从学习者已有的经验开始。"

"一个人应能利用别人的经验，以弥补个人直接经验的狭隘性。这是教育的一个必要的组成部分。"

"要使教育过程成为真正的师生共同参与的过程，成为真正合作的相互作用的过程。"

8. 凯洛夫（苏，1849 ~ ?）

以凯洛夫为代表的苏联教学理论，明确地提出教育与社会制度的关系；在全国的学校里施行统一的教学目的、教学计划、教学大纲、教科书、学生手则、教师工作条例（课时计划、上班制、五个教学环节、公开课、观摩课、超前课等）；实施综合技术教育、生产劳动教育；提出培养德智体全面发展的人材的任务等。

列宁：

"必须取得资本主义遗留下来的全部文化，用它来建设社会主义，必须取得全部科学、技术、知识和艺术，没有这些，我们就不能建设共产主义社会的生活。"

"每个青年必须懂得，只有受了现代教育，他们才能建立共产主义社会，如果不受这样的教育，共产主义仍然不过是一种愿望而已。"

加里宁：

"教育是对于受教育者心理上所施行的一种确定的有目的和有系统的感化作用，以便在受教育者的心身上养成教育者所希望的品质。"

克鲁普斯卡娅：

"一个学校，如果任意损害学生的身体健康，扼杀他的主动性自尊心和自信心，这种学校一般说来不能对学生产生任何教育影响，或者确切些说，只能产生极其有害的影响。"

凯洛夫：

"智育是人的全面发展的最重要的因素，因为在掌握科学知识的过程中，思

维、记忆和想像的能力发展起来，在这个过程中，科学概念的体系形成起来，儿童、少年、青年人的整个内部精神世界丰富起来。”

“体育是增进青年健康、发展他们的体力和各种能力的必要条件。”

“劳动是人类社会生活的基础，是人的生活和幸福的源泉。”

苏霍姆林斯基：

“我们发展学生在艺术创作方面的才能，其目的并不是要把音乐或绘画作为他们未来的职业，我们的职责是：全面地发展每一个学生的个性，发展他的天赋，形成对艺术创作的才能，以便使他享有一种多方面的完满精神生活。”

马克思与恩格斯：

“把教育同物质生产结合起来。”

苏联的教学理论比较完备、具体且思想性强，我国于20世纪50年代就开始学习苏联教育学。但是它容易产生形式主义，且惟我独尊，具有排它性和封闭性。

9. 布鲁纳（美，1915～?）

1960年布鲁纳提出发现式教学法，是一种发展才能探索真理的方法，它在教师指导下带领学生走科学家走过的路，有助于养成科学的世界观。

布鲁纳的课程论主张教材内容现代化、理论化，对教学内容的改革起了重大的作用。

他的重要言论有：

“教学论应当详细规定所由来的学习材料的最有效的序列。”

“一门课程不但要反映知识本身的性质，还要反映求知者的素质和知识获得过程的性质。”

“在发展的每个阶段，儿童都有他自己的观察世界和解释世界的独特方式，给任何特定年龄的儿童教某门学科，其任务就是按照这个年龄儿童观察事物的方式去阐述那门学科的结构。”

“教师不仅是知识的传播者，而且是模范。教师也是教育过程中最直接的有象征意义的人物，是学生可以视为榜样并拿来同自己作比较的人物。”

3.3.3 教学论改革动向

目前国际上对教育的认识已趋一致，认为教育是第一生产力，有投人（人），有转化（知识技术），有产出（人的素质的提高），“谁掌握了人材，谁就掌握了未来。”尊重知识，尊重人材，重视教育成为国家兴亡、民族盛衰的标志。

下面谈三个具体问题。

1. 教学理论的改革

近二十年来广泛开展了教育心理学的研究，使教学论越过了经验的叙述和概

括，向着同心理学相联系的边缘科学迈进，加强了理论基础。是思想方法、研究方法上的突破。本章所讨论的问题，大都考虑和应用了心理学的知识。

苏联教育家赞科夫（1901～1977）说："学生心理的研究，如果不直接地作为教育学研究的一部分，那就必然导致某些论断缺乏证据，导致教条主义。"

2. 教学内容的改革

（1）加强基础知识教学：美国在20世纪70年代出现了"回复基础"教育运动，反对侧重应用技术，不开设某些实用性的华而不实的学科。

（2）教材内容现代化：删掉陈腐过时的内容，美国中学物理增加热力学、固态物理学、核子学、放射性同位素、反应堆、核能、量子论、航空空间科学、火箭学等。

（3）教材内容理论化：强调贯穿科学的概念；知识的逻辑结构；运用学科的原理、概念，改造学科体系，如数学过去划分为算术、代数、三角、几何、解析几何、微积分就值得重新考虑。

（4）根据需要，课程内容应逐段下放：美国从小学起学习概率统计，高中学微积分、布尔代数。德国、日本也有类似的作法。由于科学技术的发展，大学课程内容不断增加，而学习时间有限，为解决这一矛盾，只有将课程内容逐段下放。有人认为"提高程度势必加大难度，加重负担；如要减轻负担、减轻难度，就必须降低程度。"教育实验证明，对教学法进行改进，可以既提高程度又不加大难度、也不加重负担，课程下放是可行措施之一。根据儿童智力的发展，小学课程中确有潜力可挖，有些课程（如数学）分块组织内容，过分强调反复练习，进度过慢，浪费学习时间的现象确实存在。如算术与代数的安排就是如此，晚学方程对解答应用问题反而增加难度加重负担。国际上目前出现的中小学数学教学现代化运动，是非功过，还有争论，但这种思潮是健康的。

（5）高等教育专业设置与课程结构的综合化

高等教育中的专业设置与课程结构的综合化趋势，是当前教育改革的世界性趋势之一。其主要特征是，社会对高等教育培养多种人才的要求日益加强，高等教育的社会职能逐步扩大，高等教育内部各方面的相互联系、相互依赖日益密切。这些都要求高等教育改变过去专业面窄、课程设置散的状况，进一步走上综合化道路。

高等院校的教学内容也有综合化的趋势。文理综合、理工结合、多科综合的现象很多，交叉学科、综合性学科层出不穷。许多新兴技术工程，如能源科学、新兴材料科学、环境科学、海洋科学、航天（太空）技术等，都需要多种专业学科联合攻关。

美国的高等教育研究人员认为，综合性的专业和课程，有利于培养现代人才的各种素质和思维能力，以及组织、交际和实际工作等方面的能力。麻省理工学

院规定，大学生至少要学习27%的社会科学课程。在另一些大学设置了“STS”[科学技术与社会（Science Technology & Society）]课程，如计算机与社会、数学与科学，能源与社会，科技发展史，以及有关种族、历史、文化和社会等方面的理论。

日本教育家认为：“没有综合化，就不会产生伟大的文化和伟大的人物。”从1971年起就进行了综合化的整顿方针。英国也设置了STS课程，规定各种荣誉学位考试科目中应包括一种科目，如语文（英）、历史、数学、音乐、植物等。法国的“富尔改革”把学科相通列为教学改革的重点，巴黎理工学院用“掺沙子”的方法设立了人文和社会科学系，加强理工科学生毕业后的适应性。

二十年来，综合化成为前苏联高校的突出特点，在高校之间，开展了校际合作与联合攻关，建立了与科研机关、生产企业的协作关系，形成了与传统的专科学院及综合性大学不同的新型联合体。

目前为了培养适应新形势需要的综合人才，外国在教育改革中强调加强以下几个方面的教育：①道德教育；②能力教育；③劳动教育；④管理教育；⑤国际交往教育（包括外国语）；⑥电子计算机技术教育；⑦美学教育；⑧有关未来的教育等。

(6) 教学手段现代化

据国际上一般的看法，知识的增加速度每十年要翻一番；传统的教学过程不能适应学生的个别差异，高材生被抑制，低材生却赶不上；普及教育需要时间、师资、经费等等，因此近二十年来，革新教学技术成了国际教育界共同关注的课题。

美国斯金纳教授说：“和其他部门比较起来，教育在接受科学成就和技术革新上是最缓慢的一个领域了，典型的教室和教学技术在一个世纪内几乎没有变化。”

视听教学在国外已有50年的历史。日本有人把视听教学设备的发展历程概括为：

视听教学设备	年 代
幻灯	19世纪后期
无声电影、唱片	20世纪初
无线电收音机	20年代
有声电影	30年代
电视、语言专用教室	50年代
闭路电视	60年代
电子计算机	70年代

现在工业发达国家，现代教学媒体（指直接介入教学活动，作为教学过程中传输信息的手段）使用得比较广泛。据日本文部省1969年5月调查，日本大中小学中有：

磁带录音机的	占86.5%
电视机的	占85.7%
幻灯机的	占83.4%
16毫米电影放映机的	占37.7%

日本学校中的视听工具，显示出增加的趋势。据1974年统计，接收器在日本学校中的普及率是：

校　　别	学校总数	电视普及率	收音机普及率
幼　儿　园	12183	97.1%	87.6%
保　育　所	15931	99.1%	79.7%
小　　　学	24592	99.4%	97.3%
初　　　中	10834	94.5%	96.4%
全日制高中	4418	94.6%	97.1%
定时制高中	1694	79.6%	93.3%

录像机的普及率是：

校　　别	录像机普及率	彩色录像机普及率
幼　儿　园	8.0%	3.6%
保　育　所	3.1%	0.9%
小　　　学	25.9%	9.8%
初　　　中	38.4%	16.0%
全日制高中	81.4%	28.1%
定时制高中	36.8%	15.5%

近年来，国外现代教学技术已成为不断革新的对象。其主要发展趋势是：

首先，已有的视听教学工具，趋向自动化、微型化，着重研制和利用新的传播工具。如语言专用教室、双轨录音机、闭路电视系统、八毫米有声放映机、八毫米胶片电影放映机、盒式电视、传像电话、留像片等。

其次，电子计算机迅速使用于教学，多种教学媒体综合化。1974年美国58%的公立中学应用电子计算机做行政与教学工作。前苏联有250个学院与200个专科技术学院采用了程序教学，建立了三百多个程序教学设备。美国用计算机

辅助教学（CAI）把初中第一册代数分为八千多条目，并含有考试题，逐条学习，计算机从显示屏上进行讲解，或放映辅助教材。学生不懂时，可以按键重复。学生的作业则由相应装置自动录入磁带或印成文字。

再次，通讯卫星开始被运用于教学（开路电视、闭路电视、卫星转播电视），为大规模传播知识开辟了新的领域。美国于1974年5月30日发射的"实用技术卫星6号（ATS－6）"进行扫盲、普通教育、职业教育、职业训练与成人教育，被誉为宇宙学校。

现代教学技术的优点一般有：①缩短学习时间，提高学习效率；②节约师资，提高师资水平；③加速普及教育，发展成人教育。

3. 教学改革中的争议

（1）基础与提高问题

近二年来出现的新技术革命，表面上是生产竞争、信息竞争，实质上是知识的竞争、人的素质的竞争。谁拥有高素质的人谁就能取得这场竞争的胜利。这种观点冲击着教学改革，于是出现培养尖子（尖端学子）与普及教育的争论，一时以前者为重，一时以后者为重，二者很难得兼，影响了课程改革。有人对课程改革抱怀疑态度，认为是一种基础与提高的循环改革，不能把学校当成"教育实验的展示场"。有人说，基础与提高，理论上似乎容易解决，二者应该并重，而实际上则分道扬鹿，各执一端。

（2）对传统教学组织形式的争议

对于小学有人主张废除现行班级授课制；有人主张大班教学（100－150人）与小组教学（10－15人）相结合；也有人主张以温和的步骤促进班级教学制的现代化，还有人主张能力分组制，如文科与理科，快班与慢班，尖子与差生等，各行其事，议论不休。从教育心理学的观点，把学生划分为尖子与差生是不对的，使差生在心理上受到压抑，使尖子助长傲气，分快班与慢班只是名称上有所不同而已。

（3）学校规模问题

学校规模变大的趋势，中小学带来了许多问题。美国中学正在把规模缩小，认为学生走读，学校只要教室、实验室、图书馆和体育场；6个班只需12个教师、1个校长、1个总务，高薪可带来高质量、高效率，可以分区设校、可以发挥家庭教育的作用。

大学规模可以大些，太大又不便管理，有人主张医学院应设在大学内，有理科指导，没有基础便没有专业，也有人主张高等教育国际化。

3.4 教学过程及其规律

教育的根本任务是育人，是提高全民族的文化道德素质，使中华民族能屹立于世界民族之林。从这个任务出发，教学过程就是教师根据国家的要求，结合学生身心发展的特点，指导学生：①获取知识；②训练思维、培养能力；③培养思想品德形成科学的世界观；④促进体力发展的过程。

这个过程包含三个因素：教师、学生和教学内容与教学手段（教材、设备、实验），是两个最活跃的人的因素和一个物质因素。提高教学质量，意味着处理好这三者的关系，具体地说，教师要掌握教学内容，了解学生情况，运用教学手段，使学生自觉地获得知识和能力，形成预期的思想品德和世界观。

从教学过程的概念，根据长期教学实践的总结，不难发现教学有如下几条基本规律：

1. 教学是一种特殊的认识过程，是科学的认识过程的捷径

科学的认识过程是“实践→认识→再实践→再认识”，是一种研究发现的过程。教学内容大部分是间接知识，是科学知识的缩影和精华。因此教学过程只能是一种发展的叙述的过程，而不全是研究发现的过程。

有的学科要重点讲理论和方法，目的是为了应用理论和方法指导实践、训练思维，对理论的来源，既可以少讲或不讲，也可以改变发生该理论的真实来源，重新建立体系，如数学。有的学科要重点讲实验，目的是为了证实理论，培养技能。如物理、化学、生物。有些内容是不容实践的，如太阳系、雪崩、地震、历史故事。所以教学过程不能硬套“实践→理论→实践”的公式。

2. 教师的主导作用和学生的主动性相结合

教学过程包含教与学两个方面，教是主导的一面。因为教师代替国家培养人才，教师要贯彻教育方针、政策，培养合格的接班人，民族才能振兴，国家才能富强。同时教师闻道在先，学有专长，只有教师才能使学生由不知到知；教师不仅决定课程的政治思想方向，而且教师的一言一行，治学态度、人生观都对学生起着潜移默化的作用。

教学过程的另一个重要的方面是学生的学。前文曾经指出：在学习过程中需要各种心理活动都处于积极活跃的状态，才能取得良好的学习效果。可见学生的主动性、自觉性是至关重要的。如果没有学生自身的主动性相配合，“教者谆谆而听者邈邈”，是无济于事的。

在对待教与学的关系中要注意防止两种偏向：一是片面强调教师的主导作用，不重视教学民主，甚至压抑学生的积极性，不顾学生实际，采取满堂灌、注

人式的方法，一切是教师说了算；二是否定教师的主导作用，大批"师道尊严"，提倡"学生自治"，鼓吹"儿童中心"，"教师围绕学生转"。

3. 传授知识与发展智力相结合

教学过程应该是获得知识与增长智力相结合的过程，两者互为条件，互为因果。启发式教学法、发现法、设计教学法都是根据这一规律而设计的，目的是使学生在启发思维、增长智力的过程中获得知识。

4. 教书与育人相结合

传授知识与思想品德教育，本来就应该结合在一起，是一条不以人的意志为转移的客观规律。我国古代教育家认为学与德是统一的，教育的任务就是"读书明理，教人做人"。孔子说："弟子入则孝，出则悌，谨而信，泛爱众，而亲仁，行有余力，则以学文。"他认为学者应以德为先。王夫之说得更为明确，他说："多识而力行之，皆可据之以为德"。

赫尔巴特（德）直接提出"教学的教育性"。他说："我不承认有任何无教育的教学"。欧文（英，1771～1858）认为"教育人就是要形成人的性格"。

俄国教育家车尔尼雪夫斯基说："科学的教育不仅可以使人获得知识和使人的智慧获得发展，并且可以培养人的高尚情感。"他已提出了科学的世界观。

皮洛戈夫（俄，1810～1881）进一步指出："不仅仅是为了获得知识而需要科学，科学中还包含着另一个重要的因素——教育因素，这个因素有时是隐藏在深处的，难于从表面上觉察出来，谁不善于利用它，谁就是还不了解科学的全部特点，就是放弃了可以轻举千斤的杠杆。"他还说："真正的科学知识，可以通过它的内容给人们以教育。"

学生的科学世界观是通过教育和社会环境的影响形成的，教师的教学态度、思想感情、立场观点、意志表现乃至一言一行，都会对学生施加影响，所谓教书不教人的纯技术观点，纯粹是撒谎。

3.5 知识与技能

心理学上把知识分为两个层次：知识与技能。学生获得知识的过程是通过对知识的理解巩固与运用来完成的。

3.5.1 知识的理解

理解知识是通过语言和掌握前人获得的认识成果时所产生的一种心理现象。它的心理成分是感觉与知觉、想像与记忆、思维（分析与综合、归纳与演绎、抽象与概括）、注意与兴趣、情感与意志。

教师如何帮助学生理解知识呢？

1. 注意科学知识的结构

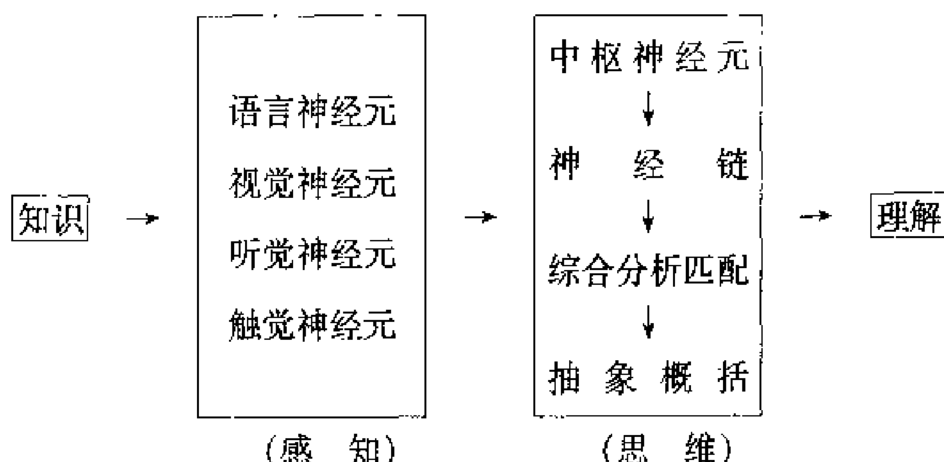
科学知识的一般结构是"概念原理→判断推理→新的知识→知识系统化→应用（知识具体化）"。

2. 注意理解知识的顺序性

在年龄特征的条件下，注意知识的理解是从外在到内在、感性到理性、直接到间接、已知到未知。

3. 注意启发思维，主动理解

人们对事物（知识）的认识是从感觉（个别属性）、知觉（整体属性）到观念（现象属性）概念（本质属性）的过程，从外部到内部的认识过程，其中的关键是从感知到思维，没有思维就没有理解。其示意图是：



3.5.2 知识的巩固

知识的巩固是解决熟记与遗忘的矛盾，它的心理成分是识记、保持（再认、重视）与遗忘。

识记（或记忆）是指对所学知识在大脑中形成暂时神经联系并留下痕迹的过程，是巩固知识的前提。下面讨论几种重要的识记。

1. 随意识记与不随意识记

识记根据有无目标进行，分为随意识记与不随意识记。随意识记是有目的任务的识记，显然主体对识记的目的任务越明确，识记的效果越好。例如，人感知过很多事物，由于对一些事物没有记住的任务，因而大部分没有记住。

不随意识记是无目的而自然记住的。有人做过实验，让两组成绩基本相同的学生阅读同一篇文章，对甲组提出记住课文的任务，对乙组没提要求，阅读后测验，重现的效果为：

$$甲:乙=35:24。$$

可见识记效果对目的任务的依存性，学校课程之所以需要考试或考查，这是理由之一。

有些学生读书，过眼云烟，随读随忘；而有些学生则不是，边读边理解边识记，看起来要慢一些，效果却好得多。

2．意义识记与机械识记

根据识记的内容是否理解，分为意义识记与机械识记。前者是以理解为基础的识记，后者则否。有人做过这两种识记效果比较的实验：

识记方式	识记材料	达到熟记所需遍数	效果
意义识记	由 80 个单词组成的诗	8	巩固
机械识记	由 80 个无意义联系的单词	80	不巩固

可见意义识记的效果远比机械识记要好。

但是机械识记仍有作用，如外语单词，人名地名等，很难转化为意义识记，这类材料的识记都要依靠机械识记。又如乘法九九表中 $7\times8=56$ 是有意义的，但小学生要记住它却是机械识记，一定要趁年轻记忆强的时候熟记九九表，外语单词更是一样，久之就不会成为负担，以后终身受用。

对识记的时间，有人做过实验，识记每增加 100 个词所需要的时间如下表：

识记字数	识记时间	每 100 字平均时间
100	9（分）	9（分）
200	24（分）	12（分）
500	65（分）	13（分）
1000	165（分）	16.5（分）

实验表明，识记材料数量越多，平均所需时间也越多，这是因为大脑神经细胞持续工作而产生抑制的结果。因此在教学中一次不宜给较多的识记任务。如中学生记外语单词的任务，应逐课识记，且每学期都应检查复习，如果平时没有认真识记，等到毕业前突击应考，即使有点效果，也是不巩固的。

3．结构识记

在 2.3 中曾经指出：结构识记是将识记的内容按照一定的意义加以组合，形成一种结构，使识记得以常久保持。乘法九九表的整体就是一个完整的结构。

乌申斯基说："儿童的天性明显地要求直观性，教儿童 5 个他所不认识的字，他将会长久地、徒劳地受这几个字的折磨；但是如果你把 20 个这一类的字和图画联系起来，儿童就会飞快地掌握它们。"数学教学中形数结合（也是一种结构），有助于加深理解，巩固识记，道理就在这里。

4．集中识记与分散识记

根据时间的分配，识记可分为集中识记与分散识记。有人做过实验，让两组学生识记同一诗篇，观察识记时间，20 天后测验其重现的效果，如下表：

识记方式	需时（分）	20天后重现时平均需要提示次数
集中识记	14.5	5
分散识记	9	0.4

可见分散识记的效果较好，因为在集中的时间内多次重复出现同样刺激，容易引起大脑皮层抑制作用，违反了识记的数量规律，而分散识记可以避免这种情况。因此要告诉学生用分散识记的方法，每次识记一段时间后要有个间隔时间，开始间隔时间可以短，以后渐渐熟了，间隔时间可以逐渐加长。

5. 部分识记、整体识记与综合识记

根据识记材料的范围，可分为部分识记、整体识记与综合识记。部分识记是把材料分成若干部分来记；整体识记是作为一个整体一次记熟；综合识记是开始时通览全文，有大致了解后分几部分分别识记，再综合全篇，达到记熟。

有人做过实验：

识记方式	需时（分）	20天后重现时平均需要提示次数
部分识记	16	7
整体识记	8	4
综合识记	6	1.5

可见综合识记效果最好，部分识记最差。原因是：一、由于没有理解整体内容就去识记部分内容、带有机械识记的性质；二、不断重复个别部分，容易引起大脑皮层的抑制；三、由于反覆重复一部分内容，容易形成“回转联想”（每一部分材料的结尾和开头形成牢固联系），使得从一部分向另一部分过渡发生困难（需要提示的就是这些地方），故效果不好。整体识记由于符合理解性规律，故效果较好，但又违反了数量规律（一次识记的数量不宜过多）。综合识记兼二者之长，故效果最好。

识记是学习方法的重要组成部分，教师要进行指导。实践证明：识记直观材料比词的效果好；识记有意义联系的材料比无意义联系的效果好；识记韵文（诗歌）比散文效果好。

6. 识记的保持与防止遗忘

识记的保持是使暂时神经联系的痕迹得到维持和加深的过程。识记后在大脑中会发生一种同保持相对立的过程，就是遗忘，它是大脑皮层的一种自然功能，当记忆痕迹受到干扰，神经出现抑制就产生遗忘。

遗忘分暂时性遗忘和永久性遗忘两种。前者指一时不能重现或再认，当有适当条件时记忆还可以恢复；后者是指不经过重新学习，记忆就不能恢复的遗忘。

记和忘是一对矛盾，没有记就没有忘。忘和记能相互促进，相互转化。有人

说"记下来的东西，不久就忘光了；早知如此，当初又何必记！"有人做过实验：甲乙二人同时学习一个材料，甲过去学过，但"全忘光了"，而乙则从未学过。平时两人的基础知识、学习能力基本不相上下，但在学习这一材料时，甲明显地优于乙。可见，忘了再捡回来，脑子神经通路的旧痕迹仍能发挥一定的作用。

有人说："脑细胞死亡后不会再生，人用功识记，脑细胞会越来越少，中小学阶段用脑多了，成年后会迅速衰退，要变笨的，还是少用功的好。"这种顾虑是不必要的，也是有害的。人的脑细胞总量有 1000 亿，即使每小时死亡 1000 个，到 100 岁时，也不过死 8 亿个，对 1000 亿来说，能占多大比例呢？人脑能容纳的信息量为 $10^{12} \sim 10^{15}$，大约等于 2500 万册图书（世界上最大图书馆的藏书总量），即使"读书破万卷"，也只有 2500 分之一。脑细胞的数量是足够用一辈子的，特别是它的特点是用则进不用则退，越用越灵。还要指出，识记能力是年轻时强，年老时衰，年轻时记的东西容易保持、再现，要趁年轻时发奋用功，"莫等闲白了少年头，空悲切"。

德国心理学家艾宾浩斯用无意义音节进行实验，识记 1 小时后保持 44%，1 天后保持 33.7%，6 天后保持 25%，得到一条遗忘曲线（图 5）。

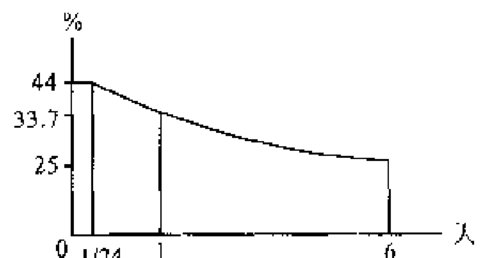


图 5

要防止遗忘，就要加强重现知识，复习是加强强化，防止遗忘的根本办法，复习可使识记痕迹得到强化。

根据实验，复习要遵循以下规律：

（1）要及时：使识记痕迹重复强化。当遗忘还没有发生时就要复习。

（2）要分散：要有一定的时间间隔，一般是 1 天，3 天，7 天，15 天，先密后疏。有人做过实验，集中复习的效果为 46.2%，分散复习的效果为 68.4%。目前有些中学在高三用一个学期时间集中复习，既违反分散的规律，又缩短了教学的学时，容易出现"夹生饭"（半生不熟也）的现象。有的学生第一次学习没有搞懂，教师第二次复习时讲得更深，显然达不到复习的效果。

（3）要多样化：如加强理解、重复、重现，举另外一个例子说明；方式也要形式多样，如背诵、答问、填空、应用、参加实践活动等。

（4）复习时注意防止旧知识的干扰。

有些知识既有相似也有差异，往往使某些差生感到模糊不解，如：

$$a(b+c)=ab+ac, \qquad \lg(b+c) \neq \lg b+\lg c,$$

$$\sin(B+C) \neq \sin B+\sin C$$

学习时，如果大脑皮质的神经细胞由于消耗能量过多而转入保护性抑制状

态，此时有关知识的暂时联系系统的复合就会发生困难，重现有关知识的障碍就随之产生，这时就要学生注意休息。

学习时如果学生心理状态出现信心不足，情绪不安定，注意涣散，受某种刺激的影响，这时要去掉这些不良心理状态后才能学习，不可勉强，甚至责难。

3.5.3 知识的应用

知识的应用是检验知识的理解和巩固的可靠指标，是促进智力发展的重要手段，也是掌握知识的根本目的。

知识的应用，本质上是知识的重现，大致有三种基本形式：

(1) 简缩性的重现，如一个单元的复习小结；

(2) 扩展性的重现，如一个定理的推论；

(3) 筛选性的重现，如填空白的考试题。

影响应用知识的因素有：不理解，目的不明确，不熟练，不能灵活运用，教师没有举例讲实际应用等。

3.5.4 技能的培养

通过练习而获得的动作方式或活动方式称为技能，技能的高级阶段又称技巧(或熟练技巧)。

技能分动作技能（如写字、弹琴、打球、绘图、操作机器等）与智力技能(如感知、记忆、想像、思维、心算、作文等)，它是人的动作自动化系统的一部分。

形成技能有以下规律：

(1) 练习的进步，总的来说是由不会到会，就练习的进度而言，有一种是先快后慢，如骑自行车，开始学习进步很快，等到熟练以后，由于没有新的目标，再进一步就比较困难了；另一种是先慢后快，如学习外语，开始很慢，等到掌握一定的单词、懂得基本语法以后，进步就快了。

(2) 练习中会出现进步停顿的高原现象。这是由于练习的兴趣降低，产生厌倦情绪，个别地出现自满现象，这时提高成绩比较困难，必须有新的方法才能有所突破。

(3) 技能减弱现象。由于重复、疲劳、厌倦或中断的原因，技能不仅出现停滞不前，而且趋于减弱。

(4) 起伏现象。产生的原因有两个方面：一是客观条件的变化，如学习环境、学习工具的改变，指导教师的改变等；二是学生主观状态的变化，如动机、兴趣、注意力的改变或自满情绪、意志的改变、身体条件的变化等。

培养技能的方法在于多练（有目的地练），循序渐进（有计划有步骤地练，

多种技能要交叉地练)，注意变换练习方法，训练学生从视觉控制向动觉控制过渡，示范讲解等。

关于形成技能的规律，既符合学习的规律，也符合训练的规律，各科教师和班主任都可以借鉴，也可以向学生介绍。

3.6 智力与思维

3.6.1 智力发展的规律

脑生理学研究表明，人脑有四个功能区域：

(1) 从外部世界接受感觉的感受区；

(2) 将感觉进行收集整理的贮存区；

(3) 评价新信息的思维判断区；

(4) 把各种信息结合起来的想像区。

大脑的功能有五种智力因素：观察力、记忆力、思考力、想像力、注意力；三种非智力因素：情感、意志和个性。

智力与知识是两个概念，是互相促进的。清代王夫之在《四书训义》中说："致知之途有二，曰学曰思。学非有碍于思，而学愈博则思愈远；思有功于学，而思之困则学必勤。"这里的意思可理解为智力，是掌握知识的必要条件，求知必须发展智力。

智力发展的一般规律是：

1. 素质是智力发展的物质基础

素质是指大脑皮层的先天性机能，它具有以下的基本特性：

(1) 神经过程的强度（指经受强烈刺激或持久工作的能力），影响人注意力集中的程度和延续时间，影响条件反射形成的速度和稳定性；

(2) 神经过程的平衡性（指兴奋抑制力量的对比关系），影响注意的分配，影响抑制反应的形成速度和稳定性；

(3) 神经过程的灵活性（指兴奋与抑制迅速交替的机能），影响知觉的广度，影响动力定型形成的速度和改造的难易。

人的大脑皮层机能的这种基本特性是有先天差别的。

2. 早期教育对智力发展的影响

布鲁纳对近千人从幼儿到成年人的追踪研究表明：把17岁时所达到的普通智力水平作为100%，则0~4岁儿童获得的智力为50%，4~8岁儿童获得30%，8~17岁获得20%。所以早期教育（包括生活环境和教育，增加语言交往的机会）对儿童智力发展有很大的影响。目前还没有引起我们足够的重视。

3. 学校教育对智力发展有重大作用

逻辑思维能力、设计能力，是数学教育的结果，语言表达能力是语文教育的结果，观察分析能力是物理、化学、生物教育的结果；学校的考试也有一定的影响，也是指挥棒，考什么就学什么、思考什么；教师知识的广博，教学方法的好坏，也影响学生智力的发展。

3.6.2 发展思维的规律

1. 思维由需要引起，从问题开始

只有当实际生活或科学研究中出现新的问题需要解决时，才引起思维的积极活动。

陆九渊说："为学患无疑，疑则有进，小疑则小进，大疑则大进。"朱熹说："读书无疑者，须教有疑，有疑者，却要无疑。"陶行知也说："发明千千万，起点是一问。…人力胜天工，只在每事问。"因此，教学中要善于组织问题，提出质疑，以调动学生的思维活动。

复习提问与教学中的谈话法就是基于这一规律而提出的。

2. 思维是直接同知识联系的，是在感知材料基础上进行的，要掌握思维的线索

罗素说："一切学科本质上应该从心智启迪时开始。"北宋程颐（1033～1107）说："为学之道必本于思，思则得之，不思则不得也。""穷至物理无他，唯思而已矣。"教学时要善于从已知引导未知，从感性引导到理性，从具体引导到抽象，使学生掌握思维的线索。

3. "存疑、实验、假设、推理、顿悟、验证"是创造性思维的基本过程

哥白尼（波兰，1473～1543）说："人的天职在勇于探索真理。"牛顿说："没有大胆的猜测，就作不出伟大的发现"。胡适提出："大胆假设，小心求证。想要壮志凌云，证要脚踏实地。"可见创造性思维能力，是一切科学家必须具备的一种才能。

4. 培养思维能力

(1) 鼓励好奇心、求知欲和探索精神。

(2) 克服思维定势，培养求异思维。思维定势是指人们按一种固定的思路去考虑问题的保守思想（习惯势力）。不摆脱陈规的束缚，新的观点很难产生。

(3) 注意培养思维的灵活性，要有相机而行的思维能力。创造思维就是思维灵活性的发展。

(4) 注意培养联想和追忆的能力。联想是依靠知识联系系统，从横的方面来回忆需要重现的知识；追忆是从纵的方向来回忆需要重现的知识。

(5) 注意发展求同思维能力，求同思维是指从解决不同的方式中发现同一规

律或原理。

(6) 注意培养想象力。

爱因斯坦曾说:"想象力比知识更重要,因为知识是有限的,而想象力概括着世界的一切,推动着进步,并且是知识进化的源泉。严格地说,想象力是科学研究的实在因素。"他对光速和引力的想象,创立了相对论。

教学中要注意扩大学生的知识领域,丰富他们的表象,要珍惜和鼓励学生的大胆想像,不要责难他们"异想天开"、"好高骛远"。鲁迅说:"孩子是可敬的,他常常想到星月以上的境界,想到地面下的情形,想到花卉的用处,想到昆虫的语言;他想飞上天空,他想潜入蚁穴。"

(7) 注意自学能力的培养。

学生从小学到中学,十二年长的时间,都习惯于听教师讲教本,做教本上的习题,除语文之外,学生很少看书。对多数人来说,自学能力没有受到锻炼,以致到大学以后缺乏自学能力,有些学生甚至不上图书馆,这个局面必须改变,必须由中学教师来加以改变。

(8) 注意操作能力的培养。

动作技能与智力技能是操作的基础,凡是一个卓越的人才,大都具有某个方面突出的技能。有些学生能洗衣做饭,安装电器,修理家具,从小养成一定的操作能力和勤奋动手的习惯,这对造就人才也是重要的。

3.7 教学工作的组织形式

为了完成教学任务,提高教学质量,教师必须懂得教学过程及规律,理解知识与技能的获取,智力与思维的培养,遵循一定的教学原则,选择适当的教学方法,还必须运用恰当的教学组织形式。为了避免重复,我们将教学原则和教学方法放在教学法中讨论。

3.7.1 教学组织形式的发展

从历史上看教学组织形式,是由个别教学形式向集体教学形式发展。我国古代的私塾、书院虽然集中一些学生,但教学内容和进度都不一样,没有一定的要求,也没有固定的时间,学生程度也参差不齐,这种个别教学的组织形式已被时代淘汰了。

随着科学技术的发展,要求扩大教学规模,增加教学内容,确定教学期限,加快教学进度,迅速培养人才。欧洲17世纪出现了课堂教学的形式,捷克教育家夸美纽斯在《大教学论》中对课堂教学进行了理论的概括,得到了广泛的采用。

20世纪以来有些学者认为课堂教学用同样内容、同样进度不适应学生的个别差异，妨碍个性发展，主张按能力分组和弹性升级的教学形式，出现了不同的教学组织形式：

1. 个别教学制

美国华虚朋于1919年在芝加哥文纳特卡学校实行文纳特卡制，把课程分为两部分：一是获得生活应用的读、写、算、史、地等知识与技能，二是发展社会意识。

美国麻萨诸塞州道尔顿中学的道尔顿制，学校按学科分实验室、教室、自修室、图书馆，学生自选学科自学。北欧、前苏联也曾实行过。

2. 活动的课时表制

以15～25分钟为一节，教学活动分三类：大班教学占20%，小组学习占30%～40%，自学占25%～40%。

3. 不分级制

一个学生可以同时在不同年级学习，按能力分组。如学习五年级语文，四年级算术，六年级自然科学。

4. 小队教学制

一个小队由2～10个教师教100多个学生的班级。

5. 能力分组教学制

跨学科能力分组——将学生分为高能组、中能组、低能组，教不同程度的课程；

学科能力分组——将学生分为文科组、理科组。

6. 课堂教学制

目前国际上教学形式繁多，一个总的趋势是选拔基础好的高能人才。在科学技术高速发展的今天，谁掌握高能人才，谁就掌握了未来。尊重知识、尊重人才，把教育放在战略首位，已成为当今世界潮流。但在教学上还没有酝酿出一套全新的、行之有效的学制。课堂教学制仍是现阶段的基本组织形式。

课堂教学制的优点有：①班级授课比分散教学好，能扩大教学规模；②能发挥教师主导作用；③能发挥学生集体的教育作用。但也有局限性：①全班使用同一教材同一进度，不利于因材施教；②这种形式容易产生理论与实际脱节，妨碍学生主动的学习。

3.7.2 课堂教学的类型与结构

课堂教学的类型根据教学内容、教学目的和学生年龄特征大致分为以下几种：

1. 综合课

一堂课中实现两种以上任务的课。在中学里它的结构分组织教学、复习检查、讲解新课、巩固新课、布置作业等。但不能机械地执行，甚至划分时间（如前苏联的五段教学法）。

2. 讲授课

主要目的是传授新知识，是高中和大学里常用的课型。它的基本结构是：复习、讲授、小结、布置作业。但不要误解讲授就是满堂灌。

3. 练习课（或习题课、实习课、实验课）

其结构一般是说明实践活动的主题、目的、任务、工作方法、演示操作、小结等。在中学里还有作业分析（包括考试小结）也属这种类型，目的在于运用知识形成技能。

4. 复习课

主要用于巩固知识，形式可以是单元小结，做一些综合性的或知识覆盖面较大的作业。目前中学里比较重视，但强调到不应有的地位。巩固是在理解的基础上进行的，把没有理解的东西，强化巩固，那就是囫囵吞枣，是难于奏效的。复习课应根据学生情况还有“补火”的任务。

5. 检查课（考试课）

检查课的任务是检查学生对知识的理解、识记与运用的情况，督促学习，发现问题，改进教学。检查课也可以与复习课合并进行，称为复习检查课。

6. 绪言课（导言课或开头课）

绪言课的任务是宣布教学计划、目的、任务、内容，展示教材前景、地位、进展和作用，鼓舞学生求知欲望，使之有目的、有兴趣地进行学习。

3.7.3 备课

备课是课堂教学的关键，对于新教师应注意以下的工作程序和要点：

1. 研究目的任务

教师接受教学任务之后要研究有关文件，包括教学大纲、教学计划、课程的目的任务、教科书、教师手册、学生手册等。明确目的任务，做到心中有数。

2. 了解学生情况

包括过去教学情况、班的情况、学生成绩、学生反映，以及学生的基础、智力、志趣、习惯、特长、思想、体质、生活交往等。

3. 钻研教材

教材内容一般是教师所了解的。但是要将它教给学生就一定要考虑教法，决不能照本宣科。比如初中平面几何，学生反映看不懂书，也有学生根本不看书，凭听讲做作业，以致初学时很感困难。有些教师轻视教材，认为“这点知识不在

话下”，有次几何课，教师问学生：“$AB+BC=?$”有学生反问“A、B、C的位置你没有说，怎么回答？”这是教师事先没有考虑的，于是补充A、B、C三点在一条直线上。又有学生问：“$AB+BC=AC$，我不懂，那两个B到哪里去了？”教师被问得瞪目不知所答。

4. 撰写教案

根据课程的教学计划（进度与要求）写出课时计划（教案）。教案有详略之分，新教师要写详案，内容包括：

①知识系统（新旧联系，重点与难点、突破的方法以及要达到的要求）；

②情况分析（学生、教材、教学）；

③进展与信息（学科动态、科学家轶事）；

④课堂小结（知识、启示、思想、做人）；

⑤作业（思考、阅读、练习）。

5. 课后记

上完一堂课之后要进行课后总结与反思，并记录下来。内容包括效果与反馈、主要经验教训、进度的调整、教学建议、学生的情况以及偶发事项等。教师要提高自己的教学水平，经常总结经验教训，每堂课写课后记是一种行之有效的方法。

3.7.4 学生知识的检查与评定

国际上对考试能否反映学生真实成绩，有些学者持怀疑态度。法国皮埃隆做了一个实验：将一篇学生的作文，用20分制，让76名教师分别作出评定，评分的误差很有出入，结果如下：

评分	0~1	2~3	4~5	6~7	8~9	10~11	12~13	14以上
评定者	1	6	20	34	10	3	2	0

这个实验说明四个问题：

（1）学生的能力本质上是可测和可以数量化的，就评分的不一致而言，不应怀疑评定的可信度；

（2）评定者之间存在的测量误差，但可以缩小到最低限度；

（3）命题的偏差是考试的关键，尤其是作文、艺术作品的评定，要使之数量化有一定的困难，命题必须慎重，同时要拟定评分标准；

（4）虽然目前还没有找到一个完美的衡量学生真实成绩的方法，但不能否定检查和评定的作用。

目前检查和评定学生知识与技能仍是教学工作的重要组成部分，它既是指导控制学习过程的手段，也是引起学习兴趣、促进知识技能的扩大与深化，借以发

展记忆力、注意力、思维力的手段。对学生而言，可以促进及时复习、检查总结、勤奋学习、了解自己的进步，使成绩得到鼓励，缺陷受到督促，以养成良好的学习态度和风气，同时也为学习较差的学生提供补偿教育的机会。对教师而言，它是一面镜子，可以了解教学效果，发现问题，总结经验教训，改进教学方法和提高教学质量。

检查和评定的方法是考试和考查，可以是口试、笔试、实验报告、开卷或闭卷，也可以是写论文、做设计等。

检查和评定的要求是：

（1）要公正、客观，力求真实地反映学生成绩，这也是对学生的一种品德教育。

（2）考试前要指导学生复习，保证掌握知识形成技能，获得较好的成绩。不要搞突然袭击，考试次数不宜过多，时间不宜过长，各科不宜集中考试（期考例外），不要使学生过分紧张和劳累。

（3）做好命题工作，包括拟好标准答案。不要出偏题怪题，防止学生猜题押题。内容既要有记忆方面的，也要形成和发展认知方面的。题目难易适度，不要“随手可拾”，要“跳而可获”。目前有一种标准化考试的倾向，主要为了便于使用计算机，容易阅卷，只写答案不要过程，看不出学生思路与演示能力，在中小学以不提倡为好。

（4）做好卷面分析和总结，以提高学习质量为主，不宜强化分数观点。有些中学片面追求升学率，到高三，初三把学生分为尖子与差生。美其名曰快班与慢班，实际上只顾尖子，为学校争名次。用一个学期搞复习，经常考试排队，不讲基础，专考难题，大多数学生做不出，靠教师作试卷分析，及格的很少，把学生考得灰溜溜的，丧失信心，视考试为畏途，特别是把差生送出校门不管，这不符合培养人才的宗旨。

4 教学法概述

“有经验的教师，总是要周密地考虑他所讲授的知识将在学生的头脑里得到怎样的理解，并根据这一点来挑选教学方法。”

——苏霍姆林斯基

4.1 教学法既是科学又是艺术

在3.4中曾经指出，教学过程应该包含四个方面：知识的获取，思维的训练，能力的培养，人生观的树立。怎样达到这个目的呢？于是形成了教学法这门综合性的学科。

教学法是在教育学与心理学的理论指导下研究教与学的规律，提高教学能力的一门学科。它既是一门科学，又是一种艺术。所谓科学，指它有一定的规律，如科学性、系统性、教育性、现代性、实用性、针对性、主动性、直观性等，从正面给出一种规范，使教学有成规可循，就是孟子所说的“与人以规矩”；所谓艺术，是在较高的境界来说的，或是带有经验性质的前科学，具有一定的灵活性、倾向性、感染性、启发性、创造性、艺术性、可浓缩性等，它从侧面给出一定的风格，不可生搬硬套，可以认为教无成法，也就是孟子所说的“与人以巧”，教有成规（科学）和教无成法（艺术），这两者是相辅相成、互为补充的，也是并行不悖的。

教学法和教学方法是两个不同的概念，教学法研究的对象包括教学方法、教学原则和教学过程，也要涉及教学内容和组织形式。

教学法根据课程内容划分为语文教学法、数学教学法、外语教学法等，在各科里还可以有更细的划分，如几何教学法、代数教学法等。

研究教学法的根本目的是为了揭示教学规律，提高教学质量和教学效率。人类知识的总量最近十年翻了一番，这样浩如瀚海的科学知识，一定要用最短的时间、最有效的方法，达到教学的高效率和高质量。

研究的方法仍是前面所常用的观察法、实际法，研究文件学用结合、总结经验，特别强调教师个人的思考。苏霍姆林斯基指出：“没有个人的思考，没有对自己的劳动寻根究底的研究精神，那么任何提高教学法的工作，都是不可思议的。”

4.2 教学法的进展

4.2.1 我国古代对教学的研究

我国从汉代以来尊孔子为圣人，基本上用儒家思想治理国家，特别提倡爱国思想，使民族精神得以发扬，使我国成为四大文明古国之一，且一直屹立在世界的东方。在教学法上的贡献，有如下几个方面：

(1) 因材施教（孔子、孟子）；

(2) 循序渐进（朱熹、陆九渊）；

(3) 循循善诱（孔子、朱熹）；

(4) 教书育人（孔子、孟子、陆九渊）；

(5) 学以致用（孔子、王安石）；

(6) 温故知新（孔子、苏轼）；

(7) 教学相长（《礼记》）。

实质上已揭示了教学的规律和基本原则。

4.2.2 西方推动教学法改革的思潮

1. 浪漫主义的影响

法国卢梭（1712～1778）的浪漫主义思想，对欧洲中世纪传统教育有较大的影响，卢梭认为在教育中做比知更重要，动摇了教育就是传授知识的观点。他还说："教师工作的中心就在于设法使儿童向往于学习。"

2. 教学民主化倾向

美国杜威（1859～1952）创儿童中心论，对传统教育有较大的冲击，虽然在实践中遭到失败，但有些论点却击中了传统观点的要害，如"既要保持教师的权威性，又要削弱教师的统治地位，使学生主动性得到发展"。

3. 进步教育运动的影响

20世纪初赫尔巴特教学法传入美国，他的五段教学法[①] 体现了学习的逻辑过程。桑戴克的条件反射联想转换论与五段教学法结合起来，进行了浪漫主义的发展，把心理学、教学论、教学法结合在一起，称为进步教育运动（或新教育），使教学法理论建立在生理与心理的基础之上。

---

① 五段教学法：(1) 预备（从旧知和观察出发）；(2) 提示（新知）；(3) 联合（新旧比较结合）；(4) 概括；(5) 应用。

4.2.3 教学法理论上的突破

(1) 以发展学生智能为出发点，代替了单纯的掌握知识与技能（双基）的旧观点。从而出现了启发式、发生式、研究式，反对注入式的教学方法。

(2) 调动学生学习积极性与发挥教师主导作用相结合，代替了“教师权威论”与“儿童中心论”的片面观点。

(3) 注重对学生的学习心理与学习方法的研究。代替了“头悬梁，锥刺股”式的苦学观点，使苦学化为乐学，并提出诱趣性原则。

(4) 教学法从受制于教学内容转化为能动地改造教材，代替了以教材为基础锦上添花式的修饰性教学法。大胆地提出对教学内容的改革，如缩节（化冗长为捷径，少而精），平坡（化难为易），缩时（节省课时），实用（为经济建设服务），下放（中学学微积分、概率统计）等。

4.3 教学原则

教学原则是根据教育目的确定的，它反映教学过程的规律，并作为教师教学工作的基本要求。

由于教学原则是由教育目的决定的，并不是一成不变的，有些原则丧失了它的意义而被抛弃了，例如17世纪夸美纽斯创导的教学的自然适应性原则，到19世纪就不用了。现在针对看法比较一致的主要教学原则（教育性原则、科学性原则、实用性原则、积极性原则、诱趣性原则、巩固性原则、因材施教的原则、教学向自学过渡的原则），分述如下：

4.3.1 教育性原则

教育性原则就是教书育人的原则，也是德智体美劳全面发展的方向性原则。

在3.3中曾引用南宋陆九渊的话：“学者所以为学，学为人而已。”我国古代历来认为“读书明理”，要懂得“为人处世”以适应本社会的道德标准。这是一个政治思想性很强的教学原则。

要贯彻教育性原则，并不是外加的，科学本身就包含了教育性因素。皮洛戈夫曾说：“不仅仅是为了获得知识而需要科学，科学还包含着另一个重要的因素——教育因素”，“真正的科学知识，可以通过它的内容给人们以教育”。车尔尼雪夫斯基也说：“科学的教育不仅可以使人获得知识和使人的智慧获得发展，并且可以培养人的高尚情感。”

一个学校对学生进行政治思想品德教育，应该主要依靠教师，每一个教师也应该乐于承担这个任务。这就是“师德”（为人师表），也就是优良校风的基础。

马卡连柯（1888～1939）说："最主要的教育手段，就是良好的教师集体和组织完善的、统一的学生集体。""只有建立了统一的学校集体，才能在儿童的意识中唤起舆论的强大力量，这种舆论的力量是支配儿童行为并使它纪律化的一种教育因素。"这种优良校风的形成，学校领导有责任，教师也有责任。

4.3.2 科学性原则

这个原则的具体要求是：

（1）必须正确地讲授现代科学中已经确定的科学知识，不允许带有迷信色彩的任何的差错和曲解。

（2）必须正确地讲授知识的联系和发展，揭示科学的规律，以发展学生的思维与智力，从这个意义上说，可以把系统性原则包含在内。

（3）讲授的知识必须能为以后的学习打基础，或者为邻近学科打基础。因而可以把基础性原则包含在内。

（4）通过科学知识的讲授，适当介绍学科的进展与重要学术问题的争议，可以培养学生辩证唯物主义的世界观。

（5）"教学最优化"与"教学的最优过程"，是贯彻科学性原则的一种体现。例如教学内容要"少而精"，就是在教学实践中找到的教学最优化方案，与其讲得多而杂，不如少而精。第斯多惠曾说："赋有良好素质的教师总是年复一年大力地精简教材，最后达到必不可少的最低限度，这才是真正的教师。"因此科学性原则应该包含教学内容少而精的原则。

所有这些都反映教师应有高屋建瓴的科学水平。

4.3.3 实用性原则

我国古代早已提出"学以致用"，北宋王安石创导的"苟不可以为天下国家之用，则不教也"。目前科学技术发达，知识量迅速增长，必须用这个原则精选知识，淘汰过时的无用的知识。从这一意义来说，实用性原则应包含现代性原则和教学内容的少而精的原则。

科学是最活跃的生产力，它的价值在于应用，应用也是学习的最终目的，从这个意义来说，实用性原则也可以说包含理论联系实际的原则。

4.3.4 主动性积极性原则

在2.5中曾经指出：在学习过程中需要各种心理活动处于积极活跃的状态，才能取得良好的学习效果。所谓积极的心理活动是指：敏锐的感知，灵活的思维，丰富的想象，牢固的记忆，热烈的情绪，坚韧的意志，稳定而集中的注意。它们是主动、积极性原则的心理基础。

乌申斯基认为："为了学习和教育，必须使受教育者包围在良好的气氛中。"如果教师态度生硬，一副阴森的面孔，满口责难的语言，"则教师要灌输他对学习尊重的一切努力将是徒然的"。

人的认识过程是主动的积极的反映过程，自觉性是感觉和知觉的钥匙，没有它就没有人的主观能动性。

自觉性原则的生理基础是巴甫洛夫关于"目的反射"的理论。巴甫洛夫说："目的反射是一种特殊的条件反射，它有着巨大的生命意义，它是我们生命精力的基本形式，只要一个人在他的全部生命中奋向那个总在渴望而永远不能达到的目标，或者一个人用同样的热情从一个目的转到另一个目的，那么生命才是美丽而强壮的，整个生命……都通过目的反射而促成，只有那些努力在生活中树立一个目的的人才会实现它们。"（《巴甫洛夫反射演讲集》）可见教师在教学过程中教育学生树立为祖国而学习的雄心壮志，增强其目的反射，可以调动学生生理上的自觉性。自觉性原则对于学习有"否决权"，没有它，教学任务与学习任务都是不能顺利完成的。教师必须花大的力气培养学生的自觉性与积极性。

如何培养学生的主动性与积极性呢？主要靠教师自身的主动性，靠教师对学生的感情。这里提几点注意事项：

(1) 有无明确的学习目的，是能否积极主动学习的条件。教师必须坚持培养学生有为革命而学习的明确目的，胸怀祖国，放眼世界，"有所作为，才是人生的最高境界"。

(2) 了解学生情况，讲课有的放矢，是引导学生主动学习的前提，脱离实际的教学，只能事倍功半，收效甚微。

(3) 在教学中引起学生学习上的新奇感，唤发学习上的兴趣，是学生积极学习的重要一环。王阳明说："今教童子，必使其趋向鼓舞，中心喜悦，则其进自不能已。"学生对教学内容感到新奇，产生兴趣，就能增强求知欲望，激发不畏险阻，刻苦学习的精神，"其进自不能已"。

(4) 有些教育家提倡可接受性原则，如第斯多惠说："教学必须符合受教学生的发展水平"，这当然是正确的，但问题的难易是相对的，也是可以转化的，应当防止把可接受性作为挡箭牌，而阻碍教师的主动性和创造性。如概率的知识曾经有人反对下放到中学，认为违反了可接受原则。实践证明，在中学讲授概率是可行的、有益的，也是可以为学生接受的。

积极的可接受性原则也是贯彻主动积极性原则所必须考虑的，畏难情绪是与积极性相排斥的。

4.3.5 诱趣性原则

教学的诱趣性原则是为了教学生动活泼，以促进学生主动积极地学习，本可

以并入在上一原则之中，但考虑到课堂活跃气氛是一个重要因素，目前有不少学生厌学，应该引起足够的注意。单独作为一个教学原则提出以引起重视。

学生上课，总希望教师讲得生动活泼；如果讲得干巴巴的，甚至使人昏昏欲睡，实在难以忍受。兴趣是人们认识某种事物或爱好某种事物的一种心理倾向，常建立在需要的基础之上。巴甫洛夫研究表明："兴趣是增强紧张度，引起大脑皮质活动状态的一种因素，所以凡是符合人们兴趣的工作或学习，就容易产生积极的效果。"

瑞士皮亚杰认为"所有智力方面的工作都要依赖于兴趣"，苏霍姆林斯基认为兴趣是一种巨大的情绪力量，缺乏它，"教育上的任何巧妙措施都是无济于事的"。我国北宋张载说："人若志趣不远，心不在焉，虽学无成。"赫尔巴特也指出："教师要把兴趣作为教学的基本目标，也是讲授中引人入胜的重要手段，培养学生的兴趣，就是培养他们经常地创造性获取知识的意向，并使所学的知识逐步达到更高的系统化的意向。"这些名家的指点，不可等亲闲视之。我们在后面有一节专门讨论诱趣性设计教学。

诱趣性原则是一种教学的手段，而不是目的，实际上不是一切东西都是有趣的，对学生仍须要求有明确的目的来对待学习。"学海无涯苦作舟"，勤奋刻苦仍然是学习的重要条件。

诱趣性原则与低级趣味，"为趣味而趣味"，"把课堂搞得热热闹闹"，毫无共同之处，教学中要防止这些误解。

4.3.6 巩固性原则

巩固性原则要求教学的安排必须使学生牢固地掌握知识，随时都能在需要时再现，并能在学习和实践中运用它们，也就是要求把知识学扎实、学到手、学过关。

依心理学的观点，刺激所引起的兴奋波是连续的，根据高级神经活动的累积规律，虽然是比较微弱的刺激，如果连续地作用，将会引起有机体强烈的反映，而在大脑中保持巩固的记忆。但是刺激引起兴奋之后，如不继续强化，就会引起消退抑制，因此，在学得知识之后，遗忘便开始进行，巩固性原则要求继续强化，解除抑制点，使学得的知识获得持久不忘，反映了强化和巩固暂时联系的必要性和规律性。

从教学过程的特点和规律来看，学生所学的知识主要是间接经验，不像人们在实践中所获得知识那样深刻，也有一些教师在教学中蜻蜓点水、走过场，忽视学生所学知识的深刻性与持久性。正如乌申斯基所描绘的"醉汉赶车，车到物亡"。教学的巩固性原则，正是反映了教学过程这种特殊规律性的必然要求。

从语文教学的角度来看，不少学生对古典文学感到困难，在学生的课文旁都

抄着教师的近代文翻译，没有真正地理解，有些字都不认识，更不要说“熟读精思”了。孙洙在《唐诗三百首序》中说：“熟读唐诗三百首，不会作诗也会吟。”苏轼说：“故书不厌百回读，熟读深思子自知。”梁章钜在《退庵论文》中说：“读书以熟为贵，作文亦然。昔有问欧阳公作文之法者，公曰：吾于贤岂有吝惜，只是要熟耳。变化姿态，皆从熟出耳。”当然，这是古人读书之法，但“熟能生巧”，没有熟就谈不上巧，还是有道理的。现在中学语文课本中古典文并不多，如果这点内容都“点水蜻蜓疑疑飞”，那就不如不教了。可能教师顾虑别人说“死记硬背”。该记的还是要记，该背的还是要背，不能因噎废食，学习还是要下点苦功夫，否则将如过眼云烟，一无所得。

外语学习，也是如此。有的学生将中学六年级的单词，自己编一本词典，随记随翻，记得滚瓜烂熟，当然这本词典是逐年增加内容而成。也有的学生，读到第二册，忘记第一册，最后囊中空空，上课如读天书。有的教师也不告诉学习方法，考试也只考目前学习中的单词，而美其名曰不加重学生负担。呜呼！学点知识也成负担，如此见识，何以教为！

从数学的特点来看，教学的巩固尤为重要。数学的系统性和逻辑性极为严密，教材的展开是由浅入深，由易到难，循序渐进，一步一个脚印。如果前面的知识不巩固，就很难进入后面的学习。不可想像没有学好平面几何而能越级学好立体几何，没有打好初等数学基础而能越级学好高等数学。常有学生家长说：他的孩子就是不喜欢数学，数学真难学，这都是基础问题，巩固性问题。教师、家长、学生都要及早注意，及时补火，及时巩固，等问题成堆才去补救，就悔之晚矣。

贯彻巩固性原则应注意以下几点：

(1) 在巩固的旧知上讲授新知

只有巩固地掌握学过的知识，才能为顺利地掌握新知识创造条件。因此，巩固性原则与系统性原则和基础性原则是紧密相联的。教学时常用“复习提问”这个环节，就是这样提出来的。以后在§4.5里将举这方面的例子。

(2) 感觉经验的东西最易巩固

要使学生获得巩固的知识，教师应将与该知识有关的直观形象或鲜明实例教给学生，或作观察对比，或让学生亲自动手。因此，巩固性原则又是与直观性原则、理论联系实际的原则紧密结合的。

例1　教三角形三内角和定理的实习作业。

教师问：“谁知道直角三角形内两个锐角之和是多少？你们拿出纸来，画个图试试看！”

教师到学生中间看他们画图。

有学生举手，教师让他到黑板上作图（图6 (a)）。

学生a说："这两个锐角互余。"

教师："为什么?"

学生a："只要作 $AD \parallel BC$。"

学生b举手说："我作的 $CE \parallel BA$。"课堂气氛显得很活跃。

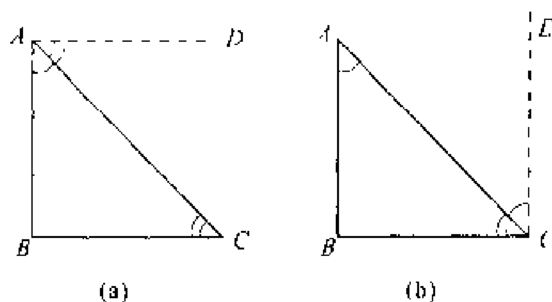


图 6

教师再问："这两个直角三角形的三个内角和是多少?"

举手的学生很多，这个结论是很明显的。

教师又问："任意三角形的三个角和有没有类似的规律呢?"

有学生说："不一定"，有的说："有。"

教师又让学生动手回答。教师在观察中发现有几种不同的证法（图7），超出了教师的估计。表扬了学生的作法。课堂气氛出现了高潮。



图 7

（3）理解和熟记是巩固知识的必要条件

在理解的基础上熟记教材，专门的识记与背诵也是不可少的。夸美纽斯曾经指出："凡是没有被悟性彻底领会的事项，都不可以熟记的方法去学习。"我国封建时期先识字背诵后开讲的教学方法是错误的，也被淘汰了。

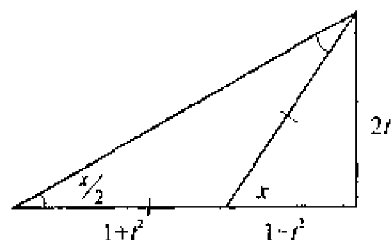


图 8

心理学认为，由于神经兴奋过程的扩散，产生"泛化"现象，使印象不深；由于神经兴奋过程的集中，产生"分化"现象。分化使兴奋中心更加明显，其他区域受到抑制，因而印象深刻，历久不忘。实验证明：如果教师教学时概念明确，条理清晰，重点突出，语言形象，就能使学生的神经兴奋容易集中和巩固，而与教师讲述无关的刺激受到抑制，这就形成了分化性抑制。如果与此相反，教学时概念含糊，缺乏条理，没有重点，口齿不清，则在学生大脑里所引起的兴奋过程就不容易集中，而向类似的概念泛化，因而印象不深，所形成的条件反射，暂时联系就不巩固。

数学中的概念基本上是要熟记的，有些公式、定理也是要背的，教师可以创造一些记忆的方法，以减轻学生的负担，比如不定积分中的万能代换，可以作出

图 8 来帮助记住下面的公式：

$$\tan\frac{x}{2}=t,\qquad x=2\arctan t,\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}。$$

(4) 加强练习，培养技能

心理学实验证明，凡是建立了条件反射而且形成了动力定型的东西才是巩固的。数学练习是数学理论用于实践的第一步，是使数学知识上升为技能的基本环节，有些学生成绩差，其基本原因之一是缺乏练习。

加强练习，虽要有一定的数量，但主要是质量（理解基础上的练习），教师要加强对练习的指导，培养和提高学生解题的能力。对数学是这样，对其他课程也是这样。练习的数量要适度，教师要先演算一次，反对“题海战术”，加重学生负担。

(5) 经常复习，防止遗忘

获得知识以后，遗忘便逐渐进行，和遗忘作斗争的有效手段就是复习。因为产生遗忘的原因，是大脑皮质细胞产生疲劳，引起消退抑制，而复习是把学习过的知识再现，可以使大脑皮质下留下来的痕迹复活。解除抑制点，因此我们能够对感知过的事物再认识、再现，能够回忆起来，经过经常的、周期性的、反复复习，可以获得长久的记忆。“学而时习之”，正是这个道理。

复习要注意及时，要在遗忘之前进行，实验证明，当消退抑制刚发生时，及时地加以强化，那么课堂上所形成的条件反射与暂时联系就能很快恢复和巩固起来，所以每天上完课后把一天所上的课都复习一遍，然后做其他的作业是最有效的；如果在遗忘之后复习，那几乎是重新学习了。

周期性的复习也是最有效的方法。比如背诵一课语文，教师讲完课后，学生理解消化后反复阅读，便能背诵，过几天再背诵一次，过两周又背诵一次，以后时间可以隔长一些，这样做下去，只要文章不是太长，可以做到终生不忘。

复习的方式很多，布置作业，对比联系，复习提问，上单元练习课，总复习课，评讲作业，考试考查，课外活动等都有一定的复习意义。只要教师、学生有意识地加以注意，获得巩固的知识，是不很困难的。

学生知识不巩固，原因是多方面的，这里只讲关于学习方法问题，可能更重要的原因是厌学。孟子所说“学问之道无它，求其放心而已”。教师应该了解情况，从根本上解决问题，是为上策。

4.3.7 因材施教的原则

因材施教的原则是我国教育史上的优良传统，孔子最先提出这个主张，他在

子路问闻斯行者时说："求也退故进之，由也兼人故退之"，提示教师要因材施教，知人善教。墨子《大取篇》中主张"量力所能至"才能"深其深，浅其浅，益其益，尊其尊"。就是说，教学要看对象，要量力，要承认差别，使差生变好，好生更好，全面提高教学质量。从这个意义上说，因材施教的原则既包含针对性原则，又包含量力性（可接受性）原则。

宋朝朱熹对因材施教提出了新的含义，他说："圣贤施教，小以小成，大以大成，无弃人也"，我们的教育应该针对每个人的素质特点，把他们教养成人，"天下无不可教之人"，"无弃人"是教育的最大功率。

因材施教的原则与心理学中超限性抑制密切相关。所谓超限性抑制，是由于刺激过于强烈，或者是几个相当强的刺激作用的总和形成过强的刺激，大脑皮质层不仅不加强兴奋的过程，反而转入抑制。巴甫洛夫认为："大脑皮质细胞是动物进化到人的阶段上最新形成的细胞，共有1000亿个，它具有高度的反应性和脆弱性，反应性使人对各种刺激很灵敏，容易发生兴奋；脆弱性使人对强烈或过多的刺激，容易发生疲劳和抑制过程。这种疲劳和抑制之所以产生，是因为大脑皮质的神经细胞有工作能力的界限，超过这个界限就产生抑制。"

由此可见，教学必须有针对性，过犹不及，要针对学生的年龄特征、个性特征、知识水平，因材施教，这样才能防止学生过分疲劳与超限性抑制的产生，有利于提高教学质量。

这个原则不允许讲授分量过多的内容，使学生难于接受；同样不允许讲授过浅过少的内容，以致不能满足学生的求知欲望而生厌倦，所谓量力教学是指学生通过一定的努力而能接受的，是积极的，不是消极的。

国际上有人提出"摘桃子"教学法，主要是指大学的教学，要讲得深一点，不能唾手可得，要使学生跳一步才能有所收获。也有人提出非议，认为还是量力为好。但从另一方面提出一个问题：目前大学课程太多，学生自学时间相对减少，不利于培养人才。

我们目前的班级授课制，有个很大的弱点，就是不利于因材施教，这个原则恰恰是针对这个弱点提出的。教师应有心理上的准备。

贯彻因材施教的原则应注意以下几点：

(1) 调查研究，了解学生

有位数学教师在讲过三角形的高的概念后，发现学生存在不少问题：

"三角形只有一个高，因为三角形只有一个顶点，一条底边，底边在下面。"

"直角三角形不能作高，因为有一边挡住了"。

"钝角三角形也不能作高，因为底边太短"。

像这样一个简单的概念，竟然有这些模糊的看法，如果教师不深入了解学生，又如何能有的放矢，解决学生的疑难呢？如果教师知道了这些情况，在他的

教学中必然生色不少，学生也受益非浅。因此，调查研究了解情况，防止主观主义，对因材施教具有十分重要的意义。

(2) 循序渐进，由近及远

心理学者告诉我们：优越的兴奋区域之所以发生，不只是依靠刺激物的强度，也依靠过去曾经发生作用的刺激物所创造的适当的皮质细胞状态为转移；新的刺激物与过去经验中所形成的关系系统发生着不同程度的相互作用。根据这个道理，教学时应注意由已知到未知，由具体到抽象，由浅入深，由易到难，由近及远，要掌握循序渐进的原则。

平面几何中"大边对大角"的定理，在证明中要作辅助线，有些学生不理解辅助线的作法，另一些学生感到证法很突然，也有些学生不理解几何定理是怎样发展的，有没有体系？个人的问题不同，深浅也不同，如何在教学中"深其深、浅其浅、益其益、尊其尊"呢？也就是既解决优生的问题，也照顾差生的问题。这个课堂上因材施教的问题，是值得大费思索的。现在介绍一个循序渐进，由近及远的教学方案。

教师从已学的"等腰三角形底角相等"定理出发，将 AD 延长到 B（图 9），让学生观察它们所对的角的变化，可以顺利地获得要证的结论。同时也发现了证明的途径，作辅助线也迎刃而解了。

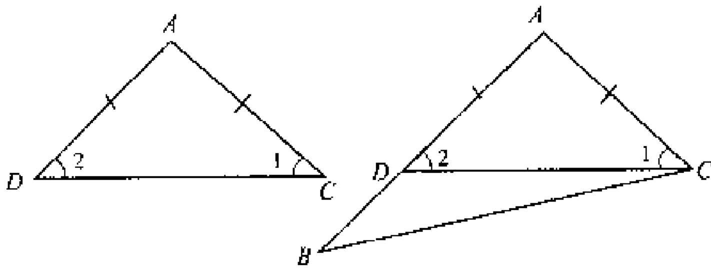


图 9

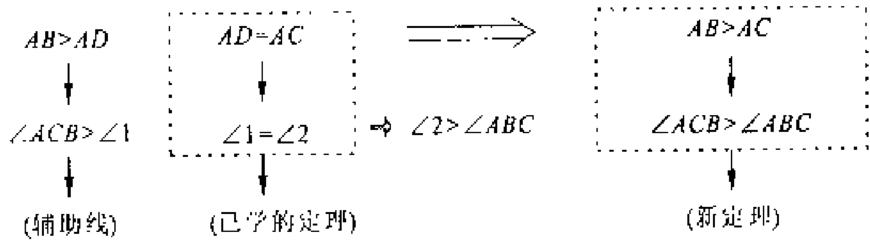


图 10

教材中这种联系是普遍存在的，关键是有待教师去发掘。化难为易，精简教

材，节省学时，提高质量，是大有作为的，既提高优生，又照顾差生，也是可行的。

循序渐进不是消极的，不能降低要求，不能“喂烂饭，抱着走”，如果养成学生习惯于“上教师做好的楼梯”，就会导致他们思想上的懒惰。虽然教学循序渐进，但并不是每一步都要教师“领着走”，这种“抱孩子”的教法，即使是匠心独具，也是事与愿违的。

循序渐进的序，并不是一成不变的。高中数学要教一元微积分是大势所趋；小学算术里讲点简单的一元一次方程，有利于解应用问题；二次方程下放到初中；电子计算机的有关知识可否列入初中教材等等，“推陈出新”总是要破除原有的“序”的。

(3) 分散难点，各个突破

这一问题是从化难为易、减轻负担的角度提出的，是上一问题的继续，这种思想方法是贯彻因材施教、量力教学的有效措施。

中学教本的编排对这个问题给予了充分的注意。例如初中平面几何的作图题，既是重点也是难点，教本采取了几个步骤分散难点：

① 引入画图题，只要求写出已知、求作和作法；

② 讲平行线后引进作法的证明；

③ 讲三角形时引入作图题的概念，要求写出已知、求作、分析作法和证明；

④ 在某些作图题中由于已知条件量的变化而引进作图题的讨论；

⑤ 引进定位作图与不定位作图，使几何作图问题最后获得完善化。

前面关于三角形内角和定理的教学设计，也是分散难点的一例。

(4) 加强辅导，长善救失

班级教学制不可能完全适合每一个学生，必然有些学生感到没有满足他们的求知欲望，而另一些学生却觉得没有听懂。教师要加强个别辅导，长其所善，救其所失，加以弥补，以达到大纲和教材所要求的水平。这样的教师是深受学生欢迎的，特别是由于教师的关心与督促，激发了学习的自觉性，成绩也会不断提高。把差生提到大纲要求的水平，会出现更多的尖子，不仅升学率上去了，向社会输送的学生也是合格的，教育质量自然也提高了。

也有的教师忙于备课，抽不出时间下班辅导，甚至怕学生问难题不敢下班，教师答不出问题，不要装懂，可以请教别人，要先当学生后当先生；下班辅导，可以增加师生的交往，了解教学效果，发现问题，改进教学。这既是业务上的锻炼，又是思想上的考验，也是更加深入的备课。

教师要指导学生看课外读物，作读书报告，对成绩好的学生，要给个别作业，指定参考书，但不能给予特殊的待遇，要防止其骄傲自满。对成绩差的学生

更要了解情况，要关心他们，给他们补基础，要肯定他们微小的积极性，对缺点要帮助他们改正，不能嫌弃，态度要好，不能损害其自尊心，不要使他们感到不光彩，没奔头；如果他们没有主观上进的要求，是很难摆脱落后面貌的。

4.3.8 教学向自学过渡的原则

前面讨论的是比较成熟的而且看法一致的教学原则，现在讨论一种新的“教学向自学过渡的原则”。

学生在离开学校走向社会之后，面临一个比较突出的矛盾，是所学的知识不能满足实际工作的需要，国际上用继续教育来缓和这一矛盾。由于社会在不断前进，新知识新技术不断涌现，自学问题就提到重要的日程上来。现在有专家主张把“教学向自学过渡的原则”列入教学原则的体系，这是培养人材的需要，不可等闲视之。

培养学生的自学能力是一个很根本的问题，应该在学校教育中引起足够的重视。俗语说举一反三，“举一”好比教师教，“反三”则应该是学生能力的指标。如果我们教师仍然“抱着走”，是不能完成这个任务的。

现在一般初中学生自学的能力较差，比如数学，不少学生看不懂书，如“平行于三角形的一边，并且和其他两边相交的直线，所截得的三角形的三边与原三角形三边对应成比例”。有学生说，“如果没有图，看几遍都不知说些什么；反过来，如果有图有数学式，要我写成文字定理，那更是莫明其妙！问老师，老师说，没关系，只要懂就行了。我们只好把书搁在一边，教本只是提供练习题而已！”这段有代表性的话，值得深思！果真是“没关系”吗？

如何使教学向自学过渡呢？这个新课题我们教师应该认真研究，这里提几条意见，仅供参考。

(1) 充分使用教科书

一般来说语文和外语做得比较好，但发现学生的课本上有如下情况：中学语文里讲一首古诗，学生在这首诗的旁边抄了一首白话诗，是在课堂抄的笔记，这个学生是否懂得这首古诗就不知道了。英语也有类似的情况，在一行英语之下用铅笔写上一行中文的翻译。

数学书除习题外，其余干干净净，大概很少去看。学生除了听课就是做作业，这是很难提高学习质量的。有人问一个初中学生：“什么是对顶角？”学生画一个几何图形说：“这就是对顶角。”再问：“对顶角相等吗？证证看。”学生答：“当然相等。”又问：“为什么？”答：“不信！你量量看！”这样的水平又如何谈得上自学呢？数学教师不仅要讲数学还要讲“课本”。

平面几何初中课本（第二册 83 页）有个定理：“一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半”。在写出已知和求证之后，画了三个图；在证明的开始

写道："分三种情况讨论"。这是为什么？课本写得很简单，不讲行吗？有些道理对初中学生也说不清，比如"完全归纳法"，这是比较困难的，而这种逻辑思维又必须让学生知道一点。现行教本喜欢用符号"⇒"、"⇔"而忽略"立论的依据"，这样是不妥的，因为对于一个问题，既要说清楚，也要补充证明的依据，否则学生不知道什么是逻辑思维，甚至证明的过程"对"了，自己还说不清根据是什么。

有人说，"历史地理的书容易看，就是数学书难看"。这话只说对一半，如果在中学多看点数学书就不会感到困难了。

(2) 教师要指导学生阅读课外书籍

现在教师有一种思想负担，怕加重学生负担。学习是有负担的，教师应该在课堂上很下功夫，让学生学懂学会。有些学生堂上听懂了，课后看书再现一次，做作业又再现一次，没有什么负担，轻松得很。如果教师自己先看一些参考书，将其中有益于学生阅读的，向学生推荐，一定能提高学生自学能力。

有些学生看小说的风气很盛，大都是相互借阅的，有的教师怕影响学生学习，见小说就没收。教师对这个问题要作研究，要把它作为培养阅读能力来对待，对青少年不宜读的书要讲清道理，推荐好的书来吸引他们。

(3) 注意培养学生勤于动手动脑的操作能力和设计能力

中学里有物理实验、化学实验、数学测量等教学活动，有些学校还有实习工厂，可以制造教具（如立体几何教具），要培养学生既动脑又动手的操作能力。

教学中的单元小结、总复习课可以作为作业布置，让学生发表意见，或组织讨论；也可以让学生编制有创造性的运用知识的练习题，可以培养他们的概括力和组织力。

班级可以组织一些课外活动，如晚会、郊游、故事会、报告会、讨论会、小型体育比赛等，要在教师的指导下让学生设计、主持，可以培养他们的设计能力和组织能力。

总之，要把学生的思想吸引到学校里来，使他们感到热爱这个集体，他们就不会把心思用到别的地方去，甚至为坏人坏事所吸引。这就是孟子所谓"求放心"吧！然后在这个集体中求知识，学本领，提高智能，提高自学能力。学生也会更热爱这个集体。

4.4 课堂教学

课堂教学是教学工作的中心环节，它对备课、辅导、批改作业、成绩考核等环节具有支配和决定的作用。如果教师课没有上好，学生困难多，教师势必忙于答疑、辅导、补课、改作业，更没有时间深入备课，课讲得更不清楚，如此恶性

循环，工作忙乱被动，思想波动，学生失去信心，教师威信降低。要提高教学质量，几乎是缘木求鱼。因此，上好每一堂课，是教师掌握主动权的基本关键。

4.4.1 课堂教学的基本要求

总的要求应该是：根据现代心理学和教育学的认识，组织教学的最优化过程以发展学生的智力、才能、个性和科学的世界观，一堂课的具体要求是：目的明确，讲解正确，方法恰当，课堂活泼，效果良好。

(1) 目的明确

教师对每一堂课总的布局要心中有数，目的何在？如何达到？是否紧扣教材？思想性在哪里？有没有把握完成任务？在上课之前，要认真考虑。

(2) 讲解正确

如何体现科学性、系统性、实用性、现代性？讲授过程是否符合知识的理解、巩固与应用规律？是否符合思维与智力的发展？是否符合少而精的原则？重点是否讲透彻？难点是否突破？

(3) 方法恰当

如何体现启发性？巩固性？是否适合学生年龄特征？量力性如何？教态如何？板书如何设计？教具使用如何？

(4) 课堂活跃

组织教学如何？学生听课情绪如何？学生思维是否活跃？主动性积极性如何？学生兴趣如何？提问答问的情况怎样？

(5) 效果良好

课堂效果有些可以从堂上观察发现，如学生的理解程度，思维线索，师生问答是否轻松活泼，教态语言、思想性、感染性等；有些要通过课后了解，如作业有无困难、辅导答疑、知识的应用、学生的反映等，还有些要通过实践的检验，了解后继内容、后继课程与邻近课程的运用，才能得到反馈，它们都是改进教学的宝贵资料。教师要注意写“课后记”，总结经验教训。

4.4.2 课的评议

教研室对于新教师的培养，上课是主要的，也可以相互听课，取长补短，听课后不能一走了之，应该进行评议（讨论），吸取经验教训，共同提高。这种活动不宜过多，要作准备，使大家都有收获。评议要掌握表扬为主，注意发挥上课教师的积极性。

评课的基本因素与课堂教学的基本要求是一致的。为了数量化（记分）的方便，下面介绍一种方案作为参考。

评课记分是受体育比赛的启发设计的，把评课因素细分为十项：

(1) 科学性　　　　(6) 计划性
(2) 实用性　　　　(7) 教育性
(3) 透彻性　　　　(8) 能力培养
(4) 启发性　　　　(9) 语言动作
(5) 趣味性　　　　(10) 板书教具

每项 10 分为满分，可以加权。如对一般教师，侧重（1）-（5）项（乘以权数 5/4）（6-10 项乘以权数 4/5）；对新教师可以侧重（1），（2），（3），（4），（6）项。

评课记分并不是一个好的方法，正如对一个学生的德智体给出一个分数一样，实际上不如给出评语更符合实际；但是如果听课的人较多，不容易得出结论，评分也就成为解决这类矛盾的一种方法。

4.4.3 课堂教学方法

在 §3.7 中曾经讨论了课堂教学的类型与结构。课堂教学的方法是随课型的不同与学生年龄特征来确定的。教学方法主要有以下几种：

(1) 讲授法

讲授法适用于高中和大学。教师在围绕主题、注意思路、讲授知识的同时，要随时注意启发性、趣味性，使学生养成长时间集中注意力听讲的习惯。

有些教学内容较多，包含一连串的知识，不适于割裂，必须用较长的时间才能讲完，这时适用讲授法。比如讲数学归纳法，既要讲清这个方法的必要性、逻辑结构和含义，又要举例加以说明，语文课、外语课都有类似的情形，这与"满堂灌"没有共同之处。

(2) 发现法

美国心理学家布鲁纳于 20 世纪中叶提出发现法，它不是讲授现成的科学知识，而是在教师的指引下，让学生探索真理，发现结论。曾经有人编出一套使用发现法进行教学的教材，在发展才能上确有成效，但是要费较多的学时，而且发现真理的过程，往往是迂回的、多渠道的，教学过程要求简捷明确，不宜是探索真理过程的重现。

过去德国教育家第斯多惠（1790-1866）提出发展式教学法，是根据教材的系统性按其发展的顺序进行教学，发现法是它的发展。在美国、日本发表的教学法文章，大都是使用这种方法，是目前比较流行的教学法。我们在 §4.6 发生式的教学里还要着重研究。

(3) 谈话法

心理学告诉我们，思维是从问题开始的。比如教师在一堂课开始说："上堂我们讲了 $C_n^{n-r} = C_n^r$"，学生一听而过，甚至有人没有听到老师讲些什么；如果教

师问：为什么 $C_n^{n-r}=C_n^r$ 呢？情况就不同了，就会引起学生的回忆、思考。谈话法以问答的方式进行教学，以唤起学生的智力活动，是小学和初中最易于接受的教学形式。

用谈话法教学时，要预先拟好问题，要考虑好提问的对象，并估计好学生的回答。问题要具体明确，要为学生力所能及，防止提问过于简单，或含糊笼统，使学生抓不住中心，要关心学生微小的积极性，不要取笑学生、为难学生。对某一中心问题要作出小结。问题提出后，要避免齐答（“一声雷”），防止课堂零乱。

4.3.6 中例 1 可作为谈话法的例子。

（4）练习法

中学里使用练习法要注意板演（学生到黑板前练习）与课堂作业相结合。练习题要有中心、有系统、有层次、有阶段、有典型性、有指导意义。

例 2　以练习

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

为中心的练习课，可组织以下几个题目让学生练习：

1 组：$m^2-n^2,(3x)^2-(2y)^2,(a+b)^2-c^2$；

2 组：y^2-1，$9a^2-\frac{1}{4}$，x^4-4；

3 组：$x^4-4x^3,16p-9p^3,(m+n)^3-(m+n)$；

4 组：$(a-b)^3-4a+4b$，$a^2+2ab+b^2-x^2+4xy-4y^2$；

5 组：$\sqrt{13^2-12^2}$，997^2；

6 组：用面积的概念说明平方差公式（图 11）。

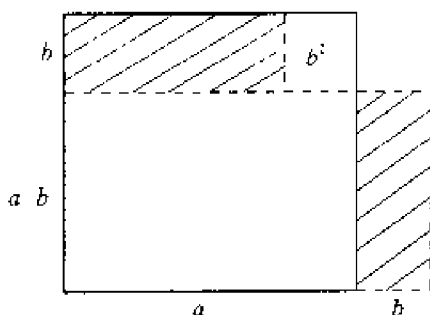


图　11

（5）演示法

演示法是教师讲课时利用直观教具、幻灯机、图影仪、计算机、录音机、录像机或示范实验的方法，以加强教学的直观性和理解性。这种方法既可以使学生获得清晰的感性知识和理性知识，又能节省板书，特别是节省时间，是一种常用的教学方法。

4.4.4　程序教学简介

在班级教学制中学生学习成绩有优中差之分，教师大都是按中等水平进行教学，基础好思维敏捷的学生早已听懂，而教师还不厌其烦地讲，使他感到厌烦；基础差而思维慢的学生仍然跟不上教师讲课的速度。这种个别差异是班级教学很难克服的。

1962 年美国普莱西（Pressey）设计了一种进行自动教学的机器，被认为是程

序教学的原始思想。

1954 年美国斯金纳教授提出程序教学法，是一种个体自学的方式，程序化的教材通过机器呈现的称为机器教学；通过课本呈现的称为课本式程序教学；通过电子计算机呈现的称为计算机辅助教学 CAI（Computer - assisted instruection），这个程序把学习材料分成许多连续的小步，由学生自动学习。

例 3　直线式程序的模式：

①──→②──→③──→④──→⑤──→

①"星期三"英语是 Wednesday

"今天是星期三"英语是：Today is ＿ ＿ ＿

②"Wednesday"由"Wed""nes""day"三部分组成，请填空白：

1° ＿ ＿ nesday　　2° Wed ＿＿ day

3° ＿＿＿ day　　4° ＿ ＿ ＿ ＿

③"星期三"英语是：＿ ＿ ＿

"今天是星期三"英语是：＿＿ ＿＿ ＿

④填空白：

星期天：＿＿ day

星期一：＿＿ day

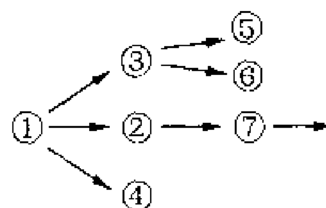
星期三：＿ nesday ＿＿ day

⑤"星期二"英语是 Tuesday

填空白：1° ＿＿＿ day

2° Tues ＿　　3° ＿ ＿ ＿ ＿

分支式程序是由美国克劳德（Crowder）首创的，模式是：



下页右方①、②、⑦是主支，③、④是分支，⑤、⑥是亚分支。分支式程序通过学生选择，走向程序上不同的支线，以适应个别差异的需要。选择完全正确的学生一直向主支前进，因而学得很快，选择不正确的分支，走向错误的分支，如果属于过去基本知识不会的学生，就要走向亚分支，复习领会了基本知识之后，再回到主支继续学下去。

目前 CAI 用于补充教学，作为教师的助手，仍不能代替教师，显然可以大大减轻教师的劳动，批改作业完全可以由 CAI 代劳。

下面着重阐明课堂教学的几点重要的方法：启发式的教学，发生式的教学，观察式实验研究法和设计教学法。

4.5 启发式教学

孔子最早提出启发式的教学。他说："不愤不启，不悱不发"，"举一隅不以三隅反，则不复也。"郑玄注《论语》："孔子与人言，必待其人心愤愤，口悱悱，乃后启发而说之"。

罗素有句名言："一切学科本质上应该从心智启迪时开始"，可见启发式的教学最先受到重视。

我国教育家叶圣陶十分推崇启发式教学。他说："所谓教师的主导作用，盖在于引导启迪，俾学生自奋其力，自致其知，非谓教师滔滔讲说，学生默默聆受。教师之为教，不在全盘授与，领悟之源弥开，纯熟之功弥深，乃为善教者也。"

这里举一个初等代数的例子来说明这种教学法。

例4　求函数 $y=\frac{3x+1}{x-2}$ 的定义域和值域。

本例中首先要复习定义域和值域，不理解这两个概念，是不能着手解题的。

教师："什么是函数 $y=f(x)$ 的定义域?"

学生某举手回答："函数 y 定义域是自变量 x 的允许值集"。

教师："$y=\frac{3x+1}{x-2}$ 的定义域是什么?"

学生："$x\neq2$ 的一切实数"。

教师："什么是函数 $y=f(x)$ 的值域?"

学生："$y=f(x)$ 的值域是函数 y 的允许值集。"

教师："怎样求 $y=\frac{3x+1}{x-2}$ 的值域?"

学生感到困惑，没有人举手。

教师："刚才 $y=\frac{3x+1}{x-2}$ 中 x 的允许值集是 $x\neq2$，那么有没有方法求 y 的允许值集呢"?

学生得到启发："试试把 x 表为 y 的分式函数。"

教师："这个设想很好，某某是用类比推理想出来的，只要从这个等式中解出 x 来就行了。这是本题解法的关键。大家动手试试。"

学生练习，教师巡视，提问一个做对了的学生板书。

学生："从 $y=\frac{3x+1}{x-2}$ 中解出 $x=\frac{2y+1}{y-3}$，现知 x 成为 y 的分式函数，显然 $y\neq3$。所以本题函数 y 的值域是 $y\neq3$"。

教师："$y=\sin x$ 的定义域是 x 的一切实数，y 的值域是什么"？

学生："$x=\arcsin y$ 的值域是 $-1\leq y\leq 1$"。

教师欣慰地点头，然后小结：

(1) 强调概念的重要性。

(2) 本题解法的关键是求函数的值域。这个方法是从类比推理中探索出来的，基本上是求函数的反函数的定义域。即如果 $y=f(x)$ 有反函数，则它的值域就是它的反函数的定义域。

(3) 本例的几何意义是什么？试画出 $y=\frac{3x+1}{x-2}$ 的图形，看它表示什么曲线？

学生动手，教师在巡视中要一个学生板书回答。

学生：$y=3+\frac{7}{x-2}$，

$(x-2)(y-3)=7$ 。

作图 12，并回答：

"它的图象是双曲线，$y=3$ 是它的水平渐近线，是函数 y 不能达到的值；$x=2$ 是它的垂直渐近线，是自变量 x 不能取的值。"

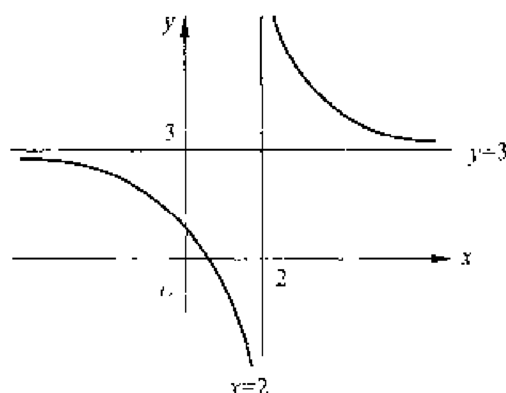


图 12

教师表扬后布置家庭作业：

求函数 $y=\frac{4x^2-2}{4x-3}$ 的极值。

附答案：$x=1$ 时 $y=2$ 是极小值；

$x=\frac{1}{2}$ 时 $y=1$ 是极大值。

课后记：

这个例子的教学体现了以下特点：

(1) 思维是从问题引起的，启发学生思维的方法之一是问答式（谈话法），问题最好能事先拟好，还要考虑提问的对象；

(2) 学生掌握解题的方法，主要是通过练习，自己动手获得的；

(3) 课堂很活跃，主要是教师掌握了思维的主动权，层层深入，引人入胜；

(4) 小结清颖突出，有基础，有方法，有开拓，有提高；

(5) 全堂联系紧凑，如珠走盘，口练笔练突出，学生对答如流，课后作业不多，形式别致，有一定的深度，可以检验学生理解的程度。

课后学生反映：

①代数与解析几何联系起来讲，过去糊涂的（如值域）都一目了然了；

②教师启发得好，否则这个作业怎么也想不出解题方法，算是真有收获；

③这堂课很有趣味，下了课还想上；

④“有几个问题我都想答，可老师没有叫我。”

教学时让学生自己动手，是防止学生“启而不发”不动脑筋的有效办法，也是加深理解的好措施。让我们举另一个数学课的例子。

例 5　证明$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}<1$，其中 n 为自然数。

教师问学生：“这个不等式左边有几项，该怎么动手证？”（观察）

有的学生说先通分，有的说先把左边化简。

教师肯定了后者，但提示：“你们先拿一个分式分析试试看。”（分析）

教师巡视，让两个学生上堂板书：

甲：$\frac{1}{1.2}=\frac{1}{2}$

乙：$\frac{1}{1.2}=1-\frac{1}{2}$

教师问乙：“你这有什么作用？”

乙继续板书：

$\frac{1}{1.2}=1-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$。

教师肯定了乙的想法，继续说：

“你们能理解乙的想法吗？大家试试看！”

学生们很活跃，都亲自动手来证。（证明）

教师：“谁先证出来，把它写在黑板上！”

还是乙最快，他的证明是：

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$
$$=1-\frac{1}{n+1}<1。$$

他们七嘴八舌，兴趣盎然，达到了高潮，感到很有收获。有学生说：“数学使我们增长了智慧，变得聪明起来了！这堂课真有味。”

这道题有两条经验：一是典型分析的启发：

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1};$$

二是学生动手练习，这比听讲更容易理解。

教师为了使大家懂得更透彻，接着提问：

"第 $n-1$ 项是什么?"(补遗)

让一个学生板书:

$$\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n},$$

有学生高兴得不得了,"这下真弄明白了!"

程序教学的思想,本质上是一种启发式的教学,例如分解因式的程序教学:

$$\begin{aligned}x^2+4x-5&=x^2+4x+(\quad)-(\quad) && \text{(启发配方)}\\&=x^2+4x+4-9\\&=(\quad)^2-(\quad)^2 && \text{(启发平方差)}\\&=(x+2)^2-3^2\\&=(\quad)(\quad) && \text{(启发析因)}\\&=(x+5)(x-1)。\end{aligned}$$

4.6 发生式教学

发生式教学法又称发现法(或探索法),是第斯多惠(1790~1866)和布鲁纳所创造的。这种方法企图模拟科学家走过的道路,使学生自己探索真理、发现结论,以发展思维能力和创造才能,养成唯物主义的科学世界观。

德国教育家第斯多惠提出"最高教学原则:激励学生独立地研究真理,或者激励学生的认识素质,使他们在掌握和寻找真理中得到发展。"发生式的教学正体现了这一精神。

这里举一个平面几何的例子来说明这种教法。

例 6 证明△ABC 内角和是 180°。

"三角形内角和是 180°"这个结论是从哪里来的呢?教本上并没有记载,只是说,"实验是把三个内角拼在一起组成一个平角",往往有一些有非凡思想、喜欢寻根究底的学生提出这类问题,他们常常问些"为什么"、"怎么想出来的"等等,这是应该鼓励的,也是教师应该想到并加以解决的。但有的教师自己答不上,却说"那只有问欧几里德",给学生一瓢冷水。

对于本例,不应满足于教本的证明,而冒然提出这个结论,不妨引导学生给予下面的启示:

教师先作出图 13 (a),提问:

"若 $AD \parallel BC$,$\angle 1=?$""为什么?"

学生学过平行线的性质,容易知道$\angle 1=\angle B$。

教师再连结 AC,写出$\angle 2$[图 13 (b)],问"$\angle 2=?$"

教师依学生回答，板书：$\angle 2=\angle C$。

再问："现在有什么新的发现吗？"

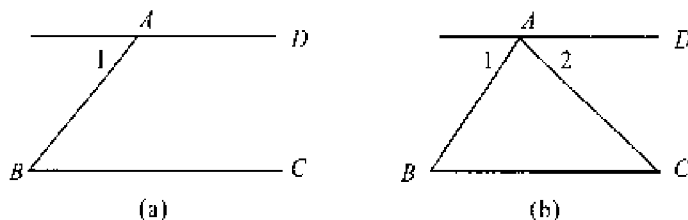


图 13

在教师的启发下，有的学生兴奋地发现了结论，课堂高涨的气氛逐渐浓厚起来，大部分学生了解了这个定理。这样，定理的发生从学生自己的思维中产生，必然成为他们自己的东西，永记不忘；也更加激励其学习兴趣，有助于科学世界观的形成。

我们在 4.6.3 中讲了本定理的另一种教法，是从特殊的直角三角形过渡到一般的三角形，也是一种启发式的教学。

有的学生说："我就怕老师讲现成的定理，也应该让我们想一想结论是什么，给了谜语，马上就说谜底，多没意思。"

学生往往在初学几何时对作辅助线感到困难，在本例中预先给了一个"台阶"，他们在证明中懂得过 A 点作 $AD \parallel BC$ 是自然的，也就不以为奇了。

高等数学中有些定理的证明要作一个比较独特的辅助函数，也和作辅助线一样的新颖。例如拉格朗日微分中值定理与柯西中值定理的证明中，都要作一个辅助函数，一般教本也没作任何解释，如果教师能引导探讨这类函数的发生，把证法讲活，这样的教法显然是高水平高质量的，是受学生欢迎的，当然更需要教师的辛勤劳动，作辅助线和辅助函数都是一种设计数学。

20 世纪初克伯屈（Kilpatrich 1871 ~ 1965）提出"The project mathod"，当时译为设计教学法，其内容是确定行动目标，指导行动过程，提供内在的动机和动力，实际上应该译为目的教学法，或克伯屈教学法，与这里的设计教学是两个不同的概念。

4.7 观察实验研究法

观察法、实验法、研究法是科学家赖以探索发现真理的重要方法，我们在§3.2 中曾有所介绍，它也是发生式教学的一种特定形式，这里作为教学方法，举一个历史上的例子，作认真的探讨，突破难点，获得启示。

例 7 假定一对成熟的兔子每月产一对小兔，在两个月后成熟，并可再产一对小兔。按此规律求兔子的繁殖率。

这个例子第一篇§2.3 中曾经提到，读者可再看一遍，这里补充几点：

（1）观察实例，认真分析，探索规律

将实例数学化，将繁殖情况别表导出裴波那契数列，并得出数列符合递推公式

$$a_{n+1}=a_{n-1}+a_n \qquad (1)$$

(2) 研究推出兔子繁殖率

定义繁殖率，令 $b_n=a_{n+1}/a_n$

算术 $\lim b_n = b = 1.618$

(3) 推广应用

在植物叶序的研究中发现 Fibonacci 数列（详见青义学《生物医学数学模型》湖南科技出版社，1990，53~54)。

4.8 设计教学法

王安石泊头瓜洲诗：

京口瓜洲一水间，钟山只隔数重山，

春风又绿江南岸，明月何时照我还？

对其中“绿”字再三推敲，由“到”而“过”，而“入”、而“满”，最后才想到“绿”字，教数学也应该如此推敲，设计方案，讲得恰到好处，这种教法可称之为设计教学法。

设计教学（design of teaching）是将一定的教学内容有效地教给学生的一种教学设计，是自外于教材的，需要教师根据学生实际和教材难易程度来改造教材，或在其中增加一个“小步子”（如引理、引例），设计出一种有效的教学方案，使学生易于接受或加强理解，比如担心学生不认识“浜”字，给它注音“bang”，注音就是一种教学设计，是附加于教材的，这种设计往往有一定的创造性。

4.5 启发式的教学，4.6 发生式的教学，从所举例题看都是一种设计教学，可以分别称为启发式设计教学、发生式设计教学。

4.8.1 先导性设计教学

我们先看一个数学的例子：

例 8　数学分析中拉格朗日微分中值定理：

“若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，(a, b) 内可导，则在 (a, b) 内至少有一点 ξ，使

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)”。$$

往往使学生感到突然，而它的应用却甚为广泛。学生常问：“拉格朗日他怎么想出来的？”史书上又没有记载，教师也不能杜撰。可以事先预备一个引例：

“在抛物线 $y=x^2$ 上取横标 $x_1=1$，$x_2=3$ 两点引割线，问抛物线上哪一点的切线平行于所引的割线？”①

这个例子先讲，到讲微分中值定理时，只要将引例一般化，就过渡到这个著名的定理了。

这个引例在论述主题时起先导的作用，这种教法称为先导性设计教学。

前面证明三角形内角和定理，也可以预先给出一个引理：“三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和”（图 14），以这条引理为根据，很容易证明这个定理（现行几何课本 86 页是把外角定理作为推论）。

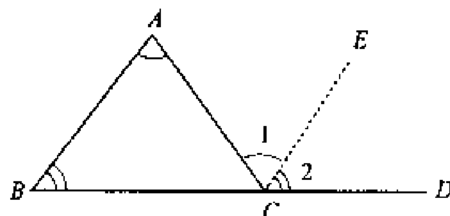


图 14

代数中解二元一次方程的配方法是较难想出的，可举一个引例：解 $(x+3)^2=2$，两边开平方得 $x+3=\pm\sqrt{2}$，以后解 $x^2+6x+7=0$ 时就不难懂得需要配平方了，对比较深奥难懂的概念，不宜从定义入手，如模糊数学中“λ 截集”的定义：

“$A_\lambda=\{x \mid \underset{\sim}{\mu}(x)\geqslant\lambda\}$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$，当 $\lambda\leqslant\underset{\sim}{\mu}(x_0)$ 时称 $x_0\in A_\lambda$，λ 称置信水平”②

这个概念很抽象，不易理解，可设计一个先导性的例子作为背景，逐步揭示这个概念的本质，最后导出这个定义，就水到渠成了。

例 9　在一次考试中有 6 人应考成绩如下：③

考员	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$
成绩	60	80	90	50	70	40	$\underset{\sim}{A}=\frac{\cdot6}{x_1}+\frac{\cdot8}{x_2}+\frac{\cdot9}{x_3}+\frac{\cdot5}{x_4}+\frac{\cdot7}{x_5}+\frac{\cdot4}{x_6}$
及格	✓	✓	✓		✓		$A_{0.6}=\{x_1, x_2, x_3, x_5\}$
良好		✓	✓				$A_{0.8}=\{x_2, x_3\}$
优秀			✓				$A_{0.9}=\{x_3\}$

最后用一个统一的新观念“λ 截集”来定义，这样深入浅出，化难为易，就易于接受了。

例 10　汉寿县女诗人易瑜（1867～1932）给我们讲《孟子》，把原文编成顺口溜，绘声绘色，娓娓动听。她说：“梁惠王嘴喳喳：晋国天下“赫麻”④ 大，

---

① 青义学：《医用高等数学》，湖南科学技术出版社，1986，页 54，64。
② 青义学：《模糊数学入门》，上海知识出版社，1987，页 42－43。
③ 青义学：《生物医学数学模型》，湖南科学技术出版社，1990，页 183。
④ 汉寿县土语“很”的意思。

瞒不得您老人家；不料传到我手下，国家屡次受糟塌。东边打一架，大媳妇守了寡，西边打一架，地方丢了一"拍拉"①；南边又被蛮子骂，寡人脸上好像鸡虱子爬。我要为死者报仇恨，您有什么好办法？"

然后要我们看书：

"梁惠王曰：晋国天下莫强焉，叟之所知也。及寡人之身，东败于齐，长子死焉；西丧地于秦七百里；南辱于楚。寡人耻之，愿比死者一洒之，如之何则可？"

70年过去了，记忆犹新。

这种教法，教古典文字时可以仿效，前面提教古诗时，先教一首白话诗，也是先导性设计教学，只要教师多费心思，学生却能终生不忘！

4.8.2 实用性设计教学

实用性设计教学是指讲述一个概念或规律（法则、定理等）时，应注意从它的实用角度提出来，当应用这个概念和规律时就很自然了。实际上，科学的概念和理论都是实际问题和客观规律的抽象，"问渠哪得清如许，为有源头活水来"，理论的源泉是实践，从实践中引出理论，才能把理论讲活，应用时才能得心应手。

讲矩阵的概念，大部分教材只给出一个干巴巴的定义，究竟这个定义是从哪里来的，用在哪里，学生仍很茫然。如果给出一个实例，情况就完全改观了。

例 11　某中学对学生身高体重作一次检测，得初中与高中的两份统计表如下：

初中	40公斤	50公斤	60公斤	70公斤	80公斤
1.4米	20	16	4	2	0
1.5米	80	100	70	20	0
1.6米	30	120	140	100	0
1.7米	15	30	120	80	0
1.8米	0	0	0	0	0

高中	40公斤	50公斤	60公斤	70公斤	80公斤
1.4米	10	6	4	0	0
1.5米	30	40	20	5	0
1.6米	20	140	130	10	2
1.7米	15	20	140	110	4
1.8米	8	12	6	7	1

可以把这个表记为矩阵的形式

① 汉寿县土话"一片"的意思。

$$A=\begin{pmatrix}20&16&4&2&0\\80&100&70&20&0\\30&120&140&100&0\\15&30&120&80&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}10&6&4&0&0\\30&40&20&5&0\\20&140&130&10&2\\15&20&140&110&4\\8&12&6&7&1\end{pmatrix}$$

只要记住各行各列的含义，其中每一个数字都有它特定的含义。

在这一认识的基础上，再设计出矩阵的模型：

A	y_1	y_2	…	y_l
x_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1l}
x_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2l}
⋮	⋮	⋮		⋮
x_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{ml}

定义
$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1l}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{ml}\end{pmatrix}=(a_{ij})_{m\times l}$$

这样，矩阵的概念就有血有肉了。不仅如此，讲矩阵的加法时也就顺理成章了。如例 11 中 $A+B$ 就意味着合并成全校的资料。矩阵的加法法则也就水到渠成了。

学生头脑中有个行列式的概念，两个行列式是不许这样相加的，他们就能分化出这两个概念的不同，而见怪不怪了。

矩阵的乘法，也可以从实例[①] 中给出乘法模型：

A	$y_1 \cdots y_l$
$x_1 \vdots x_m$	$(a_{ij})_{m\times l}$

B	$z_1 \cdots z_n$
$y_1 \vdots y_l$	$(b_{ij})_{l\times n}$

AB	$z_1 \cdots z_n$
$x_1 \vdots x_m$	$(c_{ij})_{m\times n}$

定义 $AB=(a_{ij})_{m\times l}\cdot(b_{ij})_{l\times n}=\left(\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}\right)=(c_{ij})_{m\times n}$用实际例子作说明，很有说服力。这样两个矩阵相乘的条件也摆在模型之中，应用时由于有规律可循，也就迎刃而解了。矩阵乘法模型的这种形式化框架，它构成一种结构思维，学生掌握之后，可以使知识转化为技能，达到巩固实用的目的。

下面有一个题目，我校曾作为博士研究生入学试题，阅卷时成绩很不理想，考生几乎无从下手；我们在给学生讲过矩阵乘法模型后再考试，这个题情况大不相同，他们顺利地完成了答卷。甚至有学生说，这道题是送分数的。

例 12　设甲乙二人患某种传染病（如乙肝），先调查 Ⅰ 组 5 人与甲乙有无接

① 参看青义学：《生物医学数学模型》，湖南科学技术出版社，1990，页 115～117。例 4～7，4～8。

触，有记为1，无记为0，得一级接触①：

A	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
甲	1	1	0	0	1
乙	0	1	1	1	0

再调查Ⅱ组6人与Ⅰ组5人的一级接触：

B	II_1	II_2	II_3	II_4	II_5	II_6
I_1	0	0	1	0	1	0
I_2	0	0	1	1	0	0
I_3	1	0	0	0	0	1
I_4	0	0	1	1	0	0
I_5	0	1	0	1	0	1

求Ⅱ组6人与甲乙感染者的二级接触。①

解法很简单，只要理解乘法模型

A	$\mathrm{I}_1 \cdots \mathrm{I}_5$
甲	
乙	

B	$\mathrm{II}_1 \cdots \mathrm{II}_6$
I_1	
⋮	
I_5	

AB	$\mathrm{II}_1 \cdots \mathrm{II}_6$
甲	
乙	

就能求出答案：

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

二级接触是

AB	II_1	II_2	II_3	II_4	II_5	II_6
甲	0	1	2	2	1	1
乙	1	0	2	2	0	1

学生懂得矩阵乘法模型的含义之后，知识就成为活的有实用价值的东西。这关系到能力的培养，不可小视。如果只记住定义，面临例12的问题却束手无策，这样学得的知识如一潭死水没有意义。教师目标明确，多动脑子，教学就化难为易，学生也受益匪浅。

可能学生对矩阵的乘法要附加条件感到困惑，实际上用乘法都有条件，乘的方法也各不相同。例如：鱼每斤2元，问买鱼3斤，需钱多少？算式应该是

$$2\text{元/斤} \times 3\text{斤} = 6\text{元}。$$

如果问鱼每斤2元，买鱼3条，就不能用乘法，这就说明用乘法也是有条件的。乘的方法各不相同也可举例说明。如

---

① 青义学：《生物医学数学模型》，湖南科学技术出版社，1990，页133，137。

$$a\ (bc)\ = abc \qquad a\ (b + c)\ = ab + ac$$

$$\lg_a\ (AB)\ = \lg_a A + \lg_a B$$

关于乘法的概念是一种抽象思维，教学时只要注意两点：一、什么时候可以使用乘法，即使用乘法的条件；二、如何计算，即使用乘法的方法。理解第一点就可以化抽象思维为形象思维。讲矩阵乘法时要首先明确相乘的条件，把概念从实际问题中抽出一个框架（形象化的规律）：

$$\frac{A}{X}\Big|\ Y \qquad \frac{B}{Y}\Big|\ Z \quad \Rightarrow \quad \frac{AB}{X}\Big|\ Z$$

将抽象思维转化为形象思维，从而使这个概念和法则，用定义的形式给出明显的结论，使 学生易于接受。

在常微分方程的教材中，大多数是按数学的体系展开的，讲各种典型方程的解法，但实际工作中并没有现成的微分方程，而建立方程又是难点。这种教材实际上是把数学架空了。要使数学成为解决实际问题的工具，作为教师应该用设计教学法、补充实例来突破建模的难点。

4.8.3 诱趣性设计教学

教学要产生好的效果，要使学生愉快地接受，一个十分关键的因素是教学的诱趣性。它的标志是课堂的活跃气氛，它体现了教学的艺术。教师要善于利用诱趣性的设计教学引起学生的求知欲望，调动他们的学习积极性。这是一个带有先决性的条件，没有它，学生"一心以为有鸿鹄之将至"，无心听讲，欲求有好的教学效果，是"缘木而求鱼"，不可得也！

三十年代金岳林教授给我们讲形式逻辑"白马非马辩"，编一个故事， 说公孙龙骑一匹白马过涵谷关， 守关的人指关口的石碑"文武百官到此下马"，公孙说："我骑的是白马，白马非马"。守关的人感到惊奇，他们有一段对话：

公孙："白马是马吗?"　　　　守关："是"。

公孙："黑马是马吗?"　　　　守关："是"。

公孙："白马是黑马吗?"　　　守关："不是"。

公孙："所以白马非马"。

守关的人似乎被说服了，公孙龙骑着白马扬长而去。然后金老问："这段对话的逻辑错误在哪里?"这堂课已过了六十多年了，趣味横生，记忆犹新。

诱趣性的设计教学，这里列举几点注意事项：

(1) 要根据教材设计，注意发掘教材的科学性思想性，不能为趣味而趣味。

(2) 教师要掌握科学家为科学奋斗的历史故事，适当地引进课堂，可以培养学生科学的世界观或爱国主义精神。历史轶事设计教学就是为此目的而写的。

(3) 简略介绍科学进展，学术动态，国际信息，开拓学生视野，增进知识，引起兴趣。

(4) 用解决实际问题作为动力创设情景，进行目标教学，引起动机。

(5) 教师要语言精炼，举止文雅，态度和蔼，气氛活跃；如果态度生硬，语言粗暴，使人望而生畏，课堂气氛紧张，是无趣可诱的。

(6) 诱趣性设计教学，应该以新引趣，心思诱趣，以辩求趣，以趣促学，而非单纯地把课堂搞得热热闹闹，讨学生欢心。

4.8.4 图表式设计教学

在教学中运用图表、算表、幻灯，充分利用黑板乃至电视片进行教学，可以培养学生有条理、有系统、有综合、有计划、有创造性的能力，对巩固记忆，培养归纳思维，增强设计能力也有好处。

随着科学技术的发展，教学内容必然越来越丰富，除按照现代性、实用性、针对性的要求推陈出新浓缩教材外，节省课时也是当务之急，图表式设计教学，可以缓和这一矛盾。

例 13 复习性的图表。

反三角函数	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\arctan x$	$y=\operatorname{arccot} x$
定义域	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$-\infty<x<+\infty$	$-\infty<x<+\infty$
主值区间	$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$	$0\leqslant y\leqslant\pi$	$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$	$0<y<\pi$
图象				

例 14 小结性的表格。

利用导数研究函数的性能，可简略概括如下：①

f (x)	递增	递减	稳定点	极大	极小	凹	凸	拐点
f′ (x)	+	−	0	0	0			0
f″ (x)				−	+	+	−	变号

① 青义学：《医用高等数学》，湖南科学技术出版社，1986，88。

例 15　总结性的历史年表。

朝代			时间（公元）	建都地
夏			约前 21 世纪～约前 16 世纪	安邑（今山西运城安邑） 原（今河南齐源）
商（殷）			约前 16～约前 11 世纪	亳（今山东曹县） 相（今河南内黄） 殷（今河南安阳）
西周			约前 11 世纪～前 770 年	镐京（今陕西西安）
东周	春秋		前 770～前 476 年	洛邑（今河南洛阳）
东周	战国		前 475～前 221 年	洛邑（今河南洛阳）
秦			前 221～前 206 年	咸阳（今陕西咸阳）
汉	西汉		前 206～23 年	长安（今陕西西安）
汉	东汉		25～220 年	洛阳（今河南洛阳）
三国	魏		220～265 年	许昌（今河南许昌） 洛阳（今河南洛阳）
三国	蜀		221～263 年	成都（今四川成都）
三国	吴		222～280 年	建康（今江苏南京）
晋	西晋		265～316 年	洛阳（今河南洛阳）
晋	东晋		317～420 年	建康（今江苏南京）
南北朝	南朝	宋	420～479 年	建康（今江苏南京）
南北朝	南朝	齐	479～502 年	建康（今江苏南京）
南北朝	南朝	梁	502～557 年	建康（今江苏南京）
南北朝	南朝	陈	557～589 年	建康（今江苏南京）
南北朝	北朝	北魏	386～534 年	平城（今山西大同）
南北朝	北朝	东魏	534～550 年	邺（今河北临漳县内）
南北朝	北朝	西魏	535～557 年	长安（今陕西西安）
南北朝	北朝	北齐	550～577 年	邺（今河北临漳县内）
南北朝	北朝	北周	557～581 年	长安（今陕西西安）
隋			581～618 年	大兴（今陕西西安）
唐			618～907 年	长安（今陕西西安）

续上表

五代	后梁	907～923年	汴（今河南开封）
	后唐	923～936年	洛阳（今河南洛阳）
	后晋	936～946年	汴（今河南开封）
	后汉	947～950年	汴（今河南开封）
	后周	951～960年	汴（今河南开封）
宋	北宋	960～1127年	开封（今河南开封）
	南宋	1127～1279年	临安（今浙江杭州）
元		1271～1368年	大都（今北京）
明		1368～1644年	南京（今江苏南京）
			北京（今北京）
清		1644～1911年	北京（今北京）
中华民国		1912～1949年	南京（今江苏南京）

该表对学生掌握中国历史资料具有十分重要的参考价值，具有永久性意义。

例16 参考性世界国名表。

国 名	面 积	人 口	首 都
中 国	960万平方公里	12亿	北京
…	…	…	…

布置学生这类作业，可以让他们熟悉世界地理的政治区划、国家大小，人口多寡，丰富知识，对阅报看书都有很大的参考价值。

这里论述了几种典型教学法，此外还有谈话法（如例4）、练习法（如例2）、演示法（如3.2以实验操作为目的）等就不再讨论了。4.5，4.6启发式、发生式教学也是设计教学。

4.8.5 历史轶事设计教学

我国历史上名家辈出，他们的轶事可歌可泣，足以启人心扉，令人振奋，是今日最好教材。作为教师，应该熟悉他们的事迹，以便结合教学让学生有所效法、有所兴趣。

当然，对于语文、历史、地理、政治教师是近水楼台，得天独厚。本书第一篇§8里写了些中外数学家轶事，对于数学教师也是有所裨益的。这里选择了一些简短的故事与名家语录，用历史轶事设计教学的形式向读者推荐，作为对学生

进行素质教育的一种途径，也是§2.7道德品质教育的补充，在教师与学生的接触中，还可以丰富教师的语言，增强说服力与感染力。

(1) 教书育人教育

孔子（551－479B.C.）的品德教育，仁为核心，礼为规范，孝为基础，倡导立志乐道，学而不厌，诲人不倦，身教重于言教，过则无惮改。他说：

“我非生而知之者，好古敏以求之者也。”

“加我数年，卒以学易，可以无大过矣！”

“三军可夺帅也，匹夫不可夺志也。”

“君子之过也如日月之食焉；过也，人皆见之；更也，人皆仰之。”

“言必行，行必果。”“其身正，不令而行；其身不正，虽令不从。”“不能正其身，如正人何？”

“君子食无求饱，居无求安。”“饭疏食饮水，曲肱而枕之，乐亦在其中矣，不义而富且贵，於我如浮云。”“一箪食，一瓢饮，在陋巷，人不堪其忧，回也不改其乐，贤哉回也！”

“发奋忘食，乐以忘忧，不知老之将至。”

孔子教人要善于处逆境。在宋被困，仍然“与弟子习礼大树下”；在陈绝粮，“孔子讲诵弦歌不衰”。

孔子的哲学思想，基本上是唯心的，但也有朴素唯物主义因素；他的儒家思想，成了历代封建王朝精神支柱，其消极影响不容忽视。我国五四运动“打倒孔家店”的口号就是针对其封建糟粕的。但综观孔子一生，其志其行，特别是教书育人，不愧为我国古代光辉文化的代表，是我中华民族的光荣和骄傲。

(2) 爱国主义教育

中华民族是勤劳勇敢富有爱国热忱的民族，这种民族精神是在国家处于外敌侵略的历史条件下形成的。中国的历史告诉我们，无论朝政如何腐败，道德风尚如何败坏，人民朴实老成，决不同流合污，总有一批爱国志士起来力挽狂澜，救国图存。他们猛勇顽强在人民的支持下打败了来自北方、东方、南方的一切敌人，使我国永远屹立在世界的东方。

唐代诗人李白（701－262）的名句：

“中夜四五叹，常为大国忧。”“誓欲清幽燕，不惜微躯捐。”

宋代女诗人李清照（1084－1155）诗：

“生当作人杰，死亦为鬼雄。”

陆游（1125－1201）的示儿诗：

“死去原知万事空，但悲不见九州同。王师北定中原日，家祭无忘告乃翁。”

南北民族英雄岳飞（1103－1142）的《满江红》：

“怒发冲冠，凭栏处，潇潇雨歇。抬望眼，仰天长啸，壮怀激烈。三十功名

尘与土，八千里路云和月，莫等闲白了少年头，空悲切。

靖康耻，犹未雪，臣子恨，何时灭？驾长车，踏破贺蘭山缺。壮志饥餐胡虏肉，笑谈渴饮匈奴血。待从头，收拾旧山河，朝天阙。"

南宋文天祥（1236－1283）愤怒赋诗：

"袖中若有击贼笏，便使凶渠面血流。"

"但愿扶桑红日上，江南匹士死犹荣。"

"几日随风北海游，回从扬子大江头。臣心一片磁针石，不指南方不肯休。"

"辛苦遭逢起一经，干戈落落四周星。山河破碎风飘絮，身世浮沉雨打萍。皇恐滩头说皇恐，零丁洋里叹零丁。人生自古谁无死，留取丹心照汗青。"

他们都写出了中华民族的一片爱国之心。他们的事迹，光照日月，感人肺腑。

(3) 尊重人才教育

重识尊才在我国古代就已传为美谈。唐韩愈（768－824）在《杂说四》这篇短文中说：

"世有伯乐，然后有千里马。"

就是提倡发现人才，尊重人才。最近我国提出"人材强国战略"，我们教师既要教人成材，又要当伯乐，发现人才。本书第一篇末就提出"对学生要热情提携，甘当伯乐，如熊庆来之于华罗庚，华罗庚之于陈景润，洪保之于阿贝尔，布特拉之于高斯，里沙之于伽罗瓦，拉格朗日之于柯西，达朗贝尔之于拉普拉斯等"。我国历史上这类故事还多，如唐太宗李世民（599～649）用人不计前恶，朝中既有隋炀帝的重臣，也有瓦岗义军的领袖。还有郑国皇帝王世充的将领，更有原太子建成的谋臣，以任人唯贤著称。玄武门事变后，有人向李世民告发，说魏徵曾劝建成除掉秦王，李世民问魏徵："你为何在我们兄弟间挑拨离间？"魏徵从容道："先太子如早纳臣言，必无今日之祸。"李世民觉得魏徵直爽，胆识过人，对魏说："事情已经过去，不用再提了。"提拔魏为谏议大夫，有人不服，李世民说："朝廷设官，为了治国，应该任人唯贤。"魏徵死后，李世民流泪说："以铜为镜，可正衣冠；以古为镜，可见兴替；以人为镜，可知得是，徵殁，朕亡一镜了。"

(4) 科学技术教育

科学技术是第一生产力。我国在元代（1271－1368）以前科学技术是世界上第一流的，如指南针、造纸术（东汉蔡伦，公元100年）、印刷术（宋毕昇，公元1000年）、火药被称为中国古代的四大发明。我国古代的数学与医学，曾有数学王国与医学王国的美称，它们既代表世界水平，也代表一定的科学技术基础。

以火药的发明为例，我们的祖先最早发现了硝（消石），这个名词在《神农本草经》（成书于秦汉之际）中出现，硝是由氮、氧和钾构成的化合物。氮气和氧气是空气的主要成分，只有在雷电交作时闪电中紫外线的光子才能使氮分子和

氧分子受到激发而形成氮氧化合物，这个化合物溶解在雨滴中，落到地面和泥土中与含钾的物质相作用而形成硝（钾硝）。取这样的硝和以易于着火的硫以及燃烧时能放出大量热的炭粉，就构成具有神奇作用的火药。它的形成，是很多劳动者在长时间的实践中积累了多方面的经验与思考而完成的，很难查出是哪个年代哪个人的发明。公元8世纪，硝已传到阿拉伯，时称中国雪。

当硝、硫、炭的混合体能独立地构成燃烧的事实被军事家知道后，就有将其用于作战的企图。大规模生产和应用火药是从北宋（960～1127）开始的，《武经总要》（1040）确定了火药这个名词，北宋初期应用火药的方法称为火攻。1125～1150年金兵围攻宋都汴京时，火炮就用于作战。从这时起我国被公认是世界上最先使用了火箭。当时，我国应用火药的技术和金属铸造的工艺已达到极高的水平。

东汉张衡（78～139）是世界上最早的天文学家，他制成了世界第一部浑天仪和测地震的地动仪。他所处的时代，对天文地理还处在神权迷信的支配之下，他用浑天仪和地动仪来破除迷信，犹为后人景仰。月球上有以张衡命名的环形山，宇宙间有以张衡命名的恒星。

他刻苦好学，淡于名利，在他的著作《应闲》写道：

“一个君子不应忧虑地位不尊贵，而应该担心自己的道德品质不高尚；不应该为俸禄收入少而害羞，应该以知识不渊博为耻。”

明代李时珍（1518～1593）是与张仲景、华陀齐名的医药学家。14岁时苦求父亲让他行医：

“身如逆流船，心比铁石坚，望父全儿志，至死不怕难。”

他边看病、边访问、边采药、边尝、边分辨、边制药、边记录，花30年时间终于写成著名的《本草纲目》50卷，190万字，收集药物1892种，药方11091个，插图1110幅，被誉为“东方医药巨典”，先后被译成日、英、法、德、拉丁、俄文出版，备受世界医学界的推崇。

南北朝祖冲之（429～500）一生从事科学研究，在数学、天文、历法、机械制造方面作出了卓越的贡献，为我国在世界科技史上赢得了荣誉。

解放前有人提出科学救国，我在这条路上徘徊十年，现在真正体会它的真谛。近几十年我们卫星上天，载人宇宙飞船上天，经济也上去了，世人刮目相看，国际地位空前提高。现在更重视科学技术教育，许多企业工厂需要大量的高质量的技术人才，有待教育部门积极培养。

（5）家庭教育

家庭教育的力量并不比学校教育差。现在城市大，学校多，独生子女多，寄宿学校少，中小学生住家上学的多，家长没有人管，有的家长关心子女，有的工作忙，有的教育方式与学校不一致，这里只是提出问题，教育部门、学校、教师

都要加以重视。有些家长的故事值得学习，下面介绍几例。

毛泽东给儿子的信：

你们长进了，很是喜欢。岸英文理通顺，字也写得不坏，有进取的志气，是很好的。惟有一事我建议，趁着年纪尚轻，多向自然科学学习，少谈些政治。政治是要谈的，但目前以潜心多习自然自然科学为宜，社会科学辅之。将来可以倒置过来。总之注意科学，只有科学是真学问，将来用处无穷。

人家恭维你抬举你，这有一样好处，就是鼓励你上进；但有一样坏处，就是易长自满之气，得意忘形，有不知脚踏实地、实事求是的危险。你们有你们的前程，或好或坏，决定于你们自己及你们的直接环境，我不想来干涉你们。(1941.1.31)

黄炎培给儿子的座右铭：

理必求真，事必求是，言必守信，行必踏实。

事闲勿荒，事繁勿慌，有言必信，无欲则刚。

和若春风，肃若秋霜，取象于钱，外圆内方。

陶行知（1891～1946）给蜜桃的信：

现在做一个小孩要知道三件事：第一，做人的大道理要看得明白。第二，遇患难要帮助人，肚子饿让人先吃，没饭吃时，要想法子找出饭来大家吃。第三，勇敢，勇敢的活才算是美的活。

陶行知给桃红的信：

我很希望你和小桃多学做事，有书读的要做事；有事做的要读书。先生不应该专教书；他的责任是教人做人。学生不应当专读书；他的责任是学习人生之道。我要你们做有知识、有实力、有责任心的国民；不要你们做书呆子。

书只是工具，和锄头一样，都是为做事用的。

我认为青年要有健康的体魄，劳动的身子，科学的头脑，艺术的兴趣，改造社会的精神。

傅雷的家书：

我相信你不是爱情至上主义者，而是真理至上主义者；那么你该用这个立场分析你的对象，你跟她在思想认识上、真理的执着上，是否一致或至少相去不远。从这个角度上去把事情解剖清楚，许多烦恼自然迎刃而解。你也该想到，热情是一朵美丽的火花，美则美矣，无奈不能持久。不考虑性情、品德、思想等，而单单执着于当年一段美妙的梦境，希望这梦境将来会成为现实，那么我告诉你，你可能遇到悲剧的！过去的罗曼史，让它成为一个美丽的回忆，作为一个终身怀念的梦，我认为是最明哲的办法。老是自苦只有消耗自己的精力。孩子，以后随时来信，把苦闷告诉我，我相信还能凭一些经验安慰你的。(1955.12.11)

这里只就五个方面，选择了一些名人的轶事，阐明我中华民族英雄人物的成长，及其对我国文化的影响，使我们的教师有所振奋，有所兴起。“得天下英才而教育之”，教师之乐也！

附录一

原湖南医科大学校长胡冬煦教授[①]

为《数学、数学家与数学思维》作序

全文如下：

青义学教授以八十高龄用三年时间为教师、为青年撰写了《数学、数学家与数学思维》一书。老骥伏枥，志在千里，阅读之余，感到是一部“希望工程”的科学著作，遂欣然命笔，为之作序。

这本书把数学这个科学的工具写得经渭分明，顺理成章，思如泉涌，兴致淋漓，深信数学绝不是枯燥无味的，也不是很难学的。

这本书从数学的角度把我们的祖国写得形象高大，执世界数学之牛耳，早就巍然屹立在东方，这段数学史，是伟大的爱国主义教材，应该大书特书。

这本书把世界上第一流数学家的生平展示在读者面前，他们的成就是理想、毅力与刻苦钻研的结晶，千秋万世，永为楷模。

这本书提出了一个新颖而实际的主题：数学思维是数学的灵魂，教与学都必须与思维同步，教师要教学生学会思考。书中举了一百多个例题，分析精辟，用思路引导，寻找结论，有如走进了青教授的课堂。正如我校研究生所说：“听青教授讲课是一种享受，好像听一堂高水平的艺术讲座。”这本书是作者 50 多年教学经验的总结。

这本书给数学教师补了数学史和中国古代数学一课，书中选辑了一些有实用价值的、有趣的问题，以提高兴趣，开阔视野，增长智慧，明确用场。

特作此序，向读者广为推荐。

1996 年 12 月

---

① 胡冬煦教授，现为中南大学党委书记，博士生导师。

附录二

精湛的教学艺术　崇高的人生境界①

1978年，湖南医科大学恢复研究生教育，主管此项工作的处长钟奉贤到湖南师大聘请青义学老师来校教研究生的高等数学，他欣然承诺，青老师当时是64岁的人了，可他老当益壮，热爱事业，关心学生，随遇而安。一晃十五年过去了，他潜心研究医用数学教学，卓见成效，1985年被评为省优秀教师。

青义学1914年5月出生于汉寿一个知识分子家庭，勤奋好学。1929～1931年在常德省立三中读初中，1932～1934年在长沙省立一中读高中，1935～1939年就读于北京大学数学系，参加过“一二·九”运动，抗日战争时期，父母见背，举家逃难，儿女散失，房屋被焚，饱受日寇蹂躏。他曾先后在汉寿常德等地教中学15年，执教大学40年，曾在西南联大、长沙师专、湖南师大、湖南医大任助教、讲师、副教授、教授。在模糊数学、医用数学、教学法理论方面颇有建树。

虽然青义学也经过不称意的事，但他把精神寄托在事业上，他总是说：“退一步想，海阔天空，得天下英才而教育之，一乐也。”

他热爱学生，待人诚恳。有个研究生在采访他时写道：“青教授面对满头白发，一身创伤，没有忧伤失望，常常深入到学生宿舍，为大家解答疑难，他的家成为业余课堂，被学生称为第二辅导站……清晰地浮出现一个爱国知识分子所走过的一条竭尽心血铺就的路，一条曲折而闪光的路。他年逾古稀，仍奋进在这条路上，老骥伏枥，志在千里！”

有个来自昆明的学生，数学基础不好，因爱人不同意她读研究生，深感苦恼，甚至想退学。青老师热忱为她补基础，鼓励她战胜困难，还写信劝说她家人，终于使其家庭和好，学业有成。他说“一定要把学生视为英才，虽然现在不是，但是可以教成英才。”

有个儿科研究生的答辩论文想从实验中发现规律，再用数学论证，但没有成功，青义学老师亲自参加她的实验，一同研究，终于总结出脑水肿颅内压模型，论文在美国医学杂志上发表。

青老师不懂医学，但为了使数学教学能为医学服务，他刻苦钻研模糊数学、生物数学和人工智能等边缘学科，将“医学数学化”选为自己的主攻方向，他从国际上医学数学化的趋势出发，总结出医学数学化的基本途径，并对数学教学

---

① 原文载《湘雅人物》（1994，461页）。

进行现代化改革，根据学生实际情况，在不增加课时不影响基础的前提下，逐年增加现代数学的比重。他先后编写出版了四本数学与医学相结合的专著。

（1）《医用高等数学》，内容包括微积分、微分方程、概率论、线性代数与模糊数学，1986 年出版。被全国 19 所医科院校选作教材。著名数学家江泽涵评说“是一本面向现代化、面向医学实际、具有改革精神的佳著”。

（2）《生物医学数学模型》，内容含经典数学、统计数学、线性代数、模糊数学、生物数学以及它们的生物医学模型，并首次提出了医学数学化的方法。1990 年出版，被全国 9 所院校选作研究生选修教材。

(3) 《模糊数学入门》1987 年出版，在五次全国模糊数学学习班上作为教材。

（4）《模糊集与医学数学化》，尚待出版，有些内容已在《中华医学杂志》、《中国卫生统计》、《中国教育报》、《人民日报海外版》、《健康报》上发表。

青老师说，他是学数学的，过去在师大只给学生讲些古典的数学，到医大后接受了医学这个载体和现代应用数学，得以进入医学数学化之门。他常勉励学生要有所作为，学好现代数学，用来发掘医学中的新规律，追上医学数学化的新潮流，还我“医学王国”和“数学王国”的荣誉。

青义学的教学艺术是很出色的，在他上课的教室外面常有别班的学生在窗

附录三

研究生的共同导师

——记湖南医科大学青义学教授[①]

自1978年恢复研究生招生制度以来，湖南医科大学的十余届研究生，对讲授医用高等数学的青义学教授有着广泛一致的赞誉。青教授以精湛的教学艺术、崇高的人生境界和对学生严师慈父般的热爱，赢得了研究生的敬慕和爱戴，大家都亲切地称他为“我们的共同导师”。

高超的教学艺术

青教授，1939年毕业于北京大学数学系，50年来始终没离开过讲台。他时常说“得天下英才而教育之，一乐也”。正是凭着对教育事业的满腔热情和对本职工作的极端负责，青教授在他50年的教育生涯中，从不满足于自己已有的知识水平，总是不断地学习、探索与推敲，形成了一整套相当出色的教学艺术。

青教授教学艺术的高超首先体现在他对整个教学过程的总体设计的宏观控制上。医科研究生过去没学过高等数学，中学数学也大多遗忘。为此，青教授坚持对每一届研究生进行摸底测验，以确定其教学起点和内容安排。针对十余届研究生，他制订了十余本不同的教案。随着社会需求的变化，青教授从研究生实际情况出发，在不增加课时，不影响基础教学的前提下，逐年增加了现代数学的比重(如模糊数学、生物数学)，使学生在尽可能短的时间内，掌握更多、更新、更有用的数学知识。

在每一堂课的讲授中，青义学教授更是以其丰富的经验，形成了独特的教学风格和特点。高等数学本来是比较枯燥深奥的，但青教授却讲得深入浅出，趣味横生。他从心理学、生理学、教学法等方面对学生的学习动机及对知识的接受机制进行了科学的探讨。为了增加教学效果，他介绍古今中外数学家的奋斗经历、思维方法，给研究生以启发，尤其是经常结合研究生在医学科研中遇到的实际问题进行教学，极大地激发了大家的学习热情。有的研究生还说：听青教授的课有种奇妙的感觉，预习时发觉的难点，肯定会是他讲述的重点，他完全洞察我们学习上的“关卡”。

青教授时常教导研究生不仅要听懂，更重要的是要会用，这种教学观点贯穿

---

① 作者为卓小松，原湖南医科大学研究生。原文载国务院《学位与研究生教育》(1990年2期)。

在整个教学过程中。从 1986 年起，期末考试改为撰写数学在医学方面的应用的论文，不少研究生在青教授指导下写出了一些较高质量的论文，经他推荐，发表在全国性的学术杂志上。

青教授的课堂艺术，可以说达到了炉火纯青的地步。他讲课语言洪亮，精神奕奕，和蔼可亲，板书整洁，信手画出的点、线、圆，令人赞不绝口。特别是他注重联系医学实际的教学观点，使这门高等数学课成为最受研究生欢迎的公共基础课。每次数学课结束，研究生们都有种恋恋不舍之情。有学生反映："听青教授的课，既学到了知识，又学会了思考，还领会了教学法，宛如聆听一堂高水平的艺术讲座。"

不懈的人生追求

以青教授的资历，教研究生掌握点数学知识并不难，但他认为数学和语言一样只是一种工具，必须应用于实际才能发挥作用。他一走上研究生的讲台，就认真地思索着：如何让数学和医学密切结合起来。1978 年全国还没有为医科生编写的数学教材，中文资料也很少。青教授一头扎进图书馆，在外文医学书刊中发现了大量的在医学领域应用数学的实例。他认清了科学数学化，特别是医学数学化这一国际潮流，更感受到为中国的医学现代化培养一大批掌握数学工具的高级医学人才的紧迫性。

要想数学和医学结合，就必须懂得医学知识。时年 60 多岁的数学教授公开承认自己是医学门外汉，一切从零开始，他像小学生一样不厌其烦地请教各方面的医学专家，甚至请教于他教的研究生。又长又怪的外文医学术语，像一只只拦路虎，不知花费了他多少心血。"刚查过字典的词翻过页又不认识了"，青教授以他惯有的幽默描述了当时的艰辛。

数学也在不断地更新发展，青教授不顾年老，孜孜不倦地钻研新兴学科。1981 年他参加了法国学者 Sanchez 教授在北京举办的模糊数学学习班。他是班上最年老的学员。他还刻苦钻研了生物数学、人工智能、物元分析（可拓数学）等新学科，并应用于教学实际。

1980 年青教授根据医学的需要编写了《医学用高等数学》，经过对四届研究生的教学试用，于 1986 年由湖南科学技术出版社出版。数学家江泽涵院士撰文推荐，认为是"一本符合面向现代化、面向实际、培养能力的难得的佳著"。使用该书作教材的有协和医大、中国医大、重庆医大等 17 所院校，湖南医大以此作为全国优秀教材上报，并经国家教委审定为全国交流讲义。

为了让更多的医药工作者了解医学数学化的国际潮流和数学在医学现代化中的重要作用，11 年来，青教授不仅多次在报刊上撰文论述数学与医学的结合，还多次参加学术会议呼吁在医学界加强数学教育，改变现代医生的知识结构。青

教授向卫生部陈敏章部长的汇报“关于数学在医学现代化中的作用”已在《健康报》上发表。最近青教授撰写了一部专著《生物医学数学模型》，收集了一百多例医理的数学模型，利用数学为工具，探索生物医学规律，在医学数学化的道路上迈进了可喜的一步。该书已由湖南科学技术出版社接受出版。

活到老，学到老。青教授的言行正是这样一种高尚人生境界的写照。他永不松懈的人生追求，在湖南医大的师生中传为佳话。

研究生的良师益友

青教授不是哪个研究生的具体导师，但在教书育人方面同样起到了导师的作用。他为人随和，亲切乐观，研究生愿意同他接近，生活学习上的心事也愿找他倾诉，他在研究生中享有很高的威望。早几年外地大学生上街游行，有的研究生思想波动，主动找青教授谈心。参加过“一二·九”学生运动的青教授十分诚恳地谈了自己的看法，引导他们正确看待国家面临的问题和困难，以自己的亲身经历谈到新中国的成就。一番平易热情的话，使研究生们感到心悦诚服。

青教授总是像对待自己的孩子一样，以他慈父般的胸怀关心和爱护学生。一位来自昆明的研究生，因爱人不同意她深造，深感苦恼，甚至想退学。青教授不但帮她补上数学，给她鼓舞干劲，还亲自写信劝说其家人，终于解决了她的家庭问题，使她坚持完成了研究生学业。

75 岁高龄的青教授即将退休了。望着他的皱纹和白发，我们带着依依不舍的心情向他告别，他送我们到门口，微笑着告诉我们：“现在手头上还有些事：

教授向卫生部陈敏章部长的汇报“关于数学在医学现代化中的作用”已在《健康报》上发表。最近青教授撰写了一部专著《生物医学数学模型》，收集了一百多例医理的数学模型，利用数学为工具，探索生物医学规律，在医学数学化的道路上迈进了可喜的一步。该书已由湖南科学技术出版社接受出版。

活到老，学到老。青教授的言行正是这样一种高尚人生境界的写照。他永不松懈的人生追求，在湖南医大的师生中传为佳话。

研究生的良师益友

青教授不是哪个研究生的具体导师，但在教书育人方面同样起到了导师的作用。他为人随和，亲切乐观，研究生愿意同他接近，生活学习上的心事也愿找他倾诉，他在研究生中享有很高的威望。早几年外地大学生上街游行，有的研究生思想波动，主动找青教授谈心。参加过“一二·九”学生运动的青教授十分诚恳地谈了自己的看法，引导他们正确看待国家面临的问题和困难，以自己的亲身经历谈到新中国的成就。一番平易热情的话，使研究生们感到心悦诚服。

青教授总是像对待自己的孩子一样，以他慈父般的胸怀关心和爱护学生。一位来自昆明的研究生，因爱人不同意她深造，深感苦恼，甚至想退学。青教授不但帮她补上数学，给她鼓舞干劲，还亲自写信劝说其家人，终于解决了她的家庭问题，使她坚持完成了研究生学业。

75岁高龄的青教授即将退休了。望着他的皱纹和白发，我们带着依依不舍的心情向他告别，他送我们到门口，微笑着告诉我们：“现在手头上还有些事：